

Gravitation

Partie I : Mécanique céleste

Hervé Beust

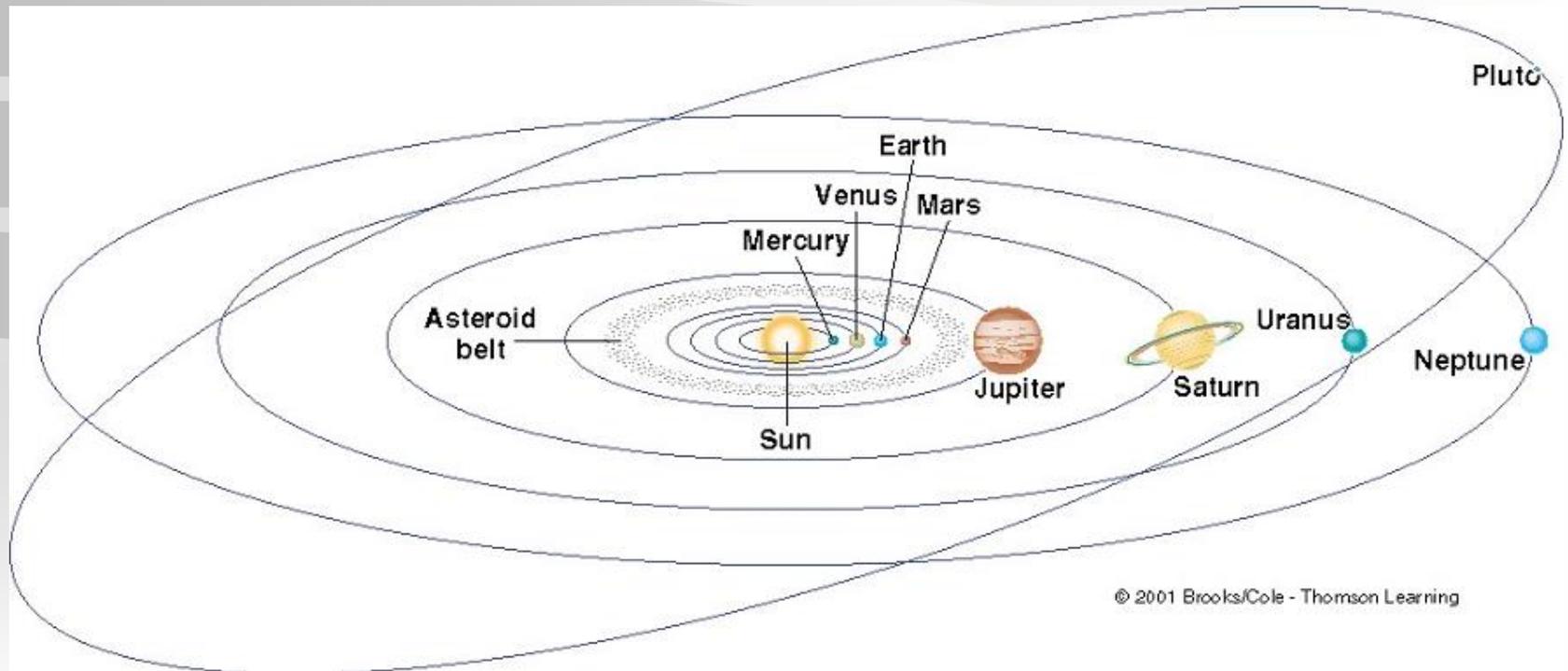
Institut de Planétologie et d'Astrophysique de Grenoble

Gravitation : Mécanique céleste

0. Présentation du Système Solaire
1. L'interaction de gravitation
2. Mécanique Hamiltonienne
3. Le problème des deux corps et les lois de Kepler
4. Le problème restreint des 3 corps
5. Le problème Képlérien perturbé
6. La résonance de Kozai et les théories planétaires
7. Les résonances
8. Le chaos
9. Les effets de marée
10. Les planètes extrasolaires
11. Les systèmes binaires ou multiples

Le Système Solaire : C'est quoi ?

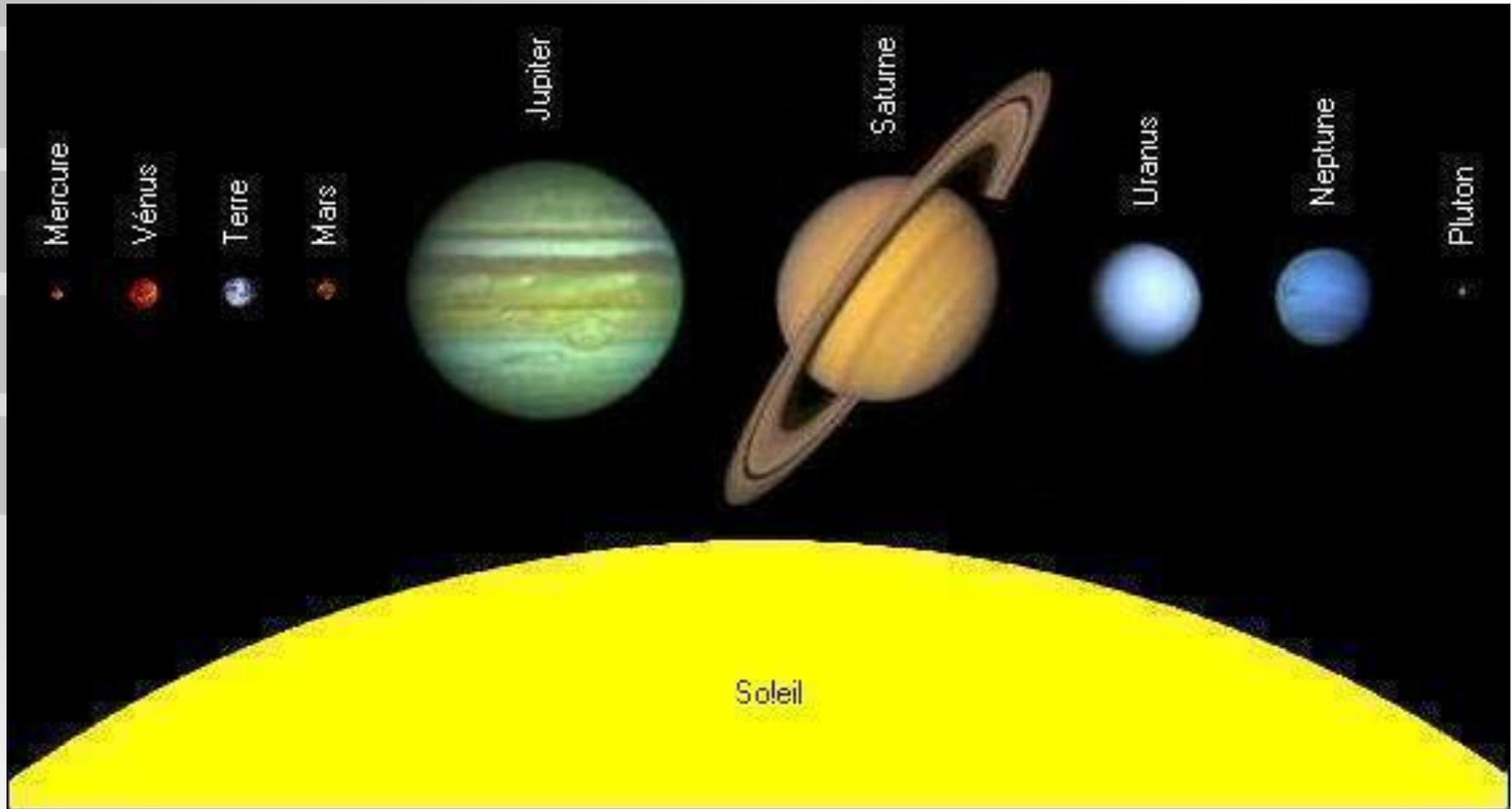
- C'est un **systeme planétaire** lié à l'étoile Soleil.
- Il a la forme d'un **disque en rotation** autour du Soleil.



Le Système Solaire : Qu'y trouve-t-on ?

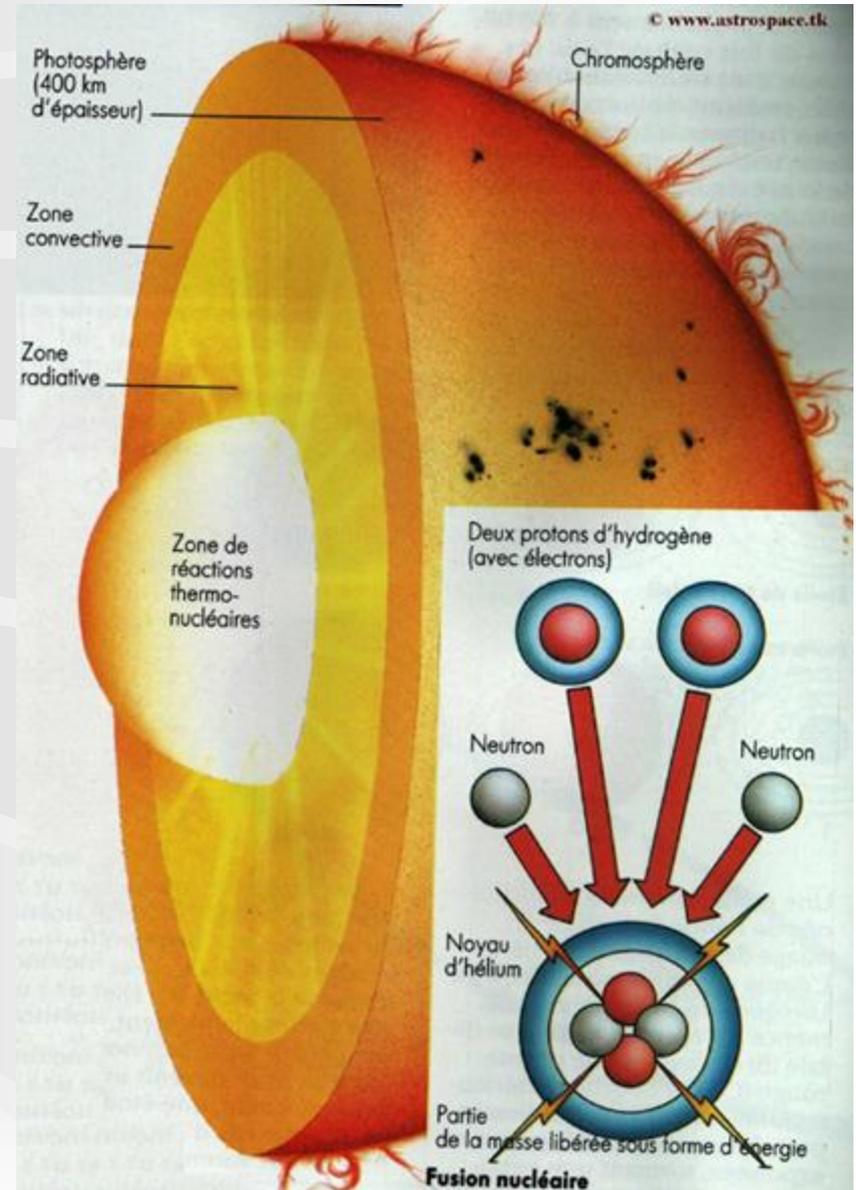
- Une **étoile** au centre : Le Soleil (99% de la masse), étoile banale de type G2, âge 5 milliards d'années.
- Des **planètes géantes** gazeuses (Jupiter, Saturne, Uranus, Neptune)
- Des **planètes telluriques** rocheuses (Mercure, Vénus, Mars, Terre)
- Des **satellites de planètes**, souvent glacés (~50 objets)
- Des **astéroïdes** et **objets de Kuiper** (des milliers + Pluton ?)
- Des **comètes**, loin au-delà des planètes (Nuage de Oort : des millions)
- Des **poussières**, des particules chargées (vent solaire)
- Mais surtout : **DU VIDE !!**

Tailles comparées des planètes et du Soleil



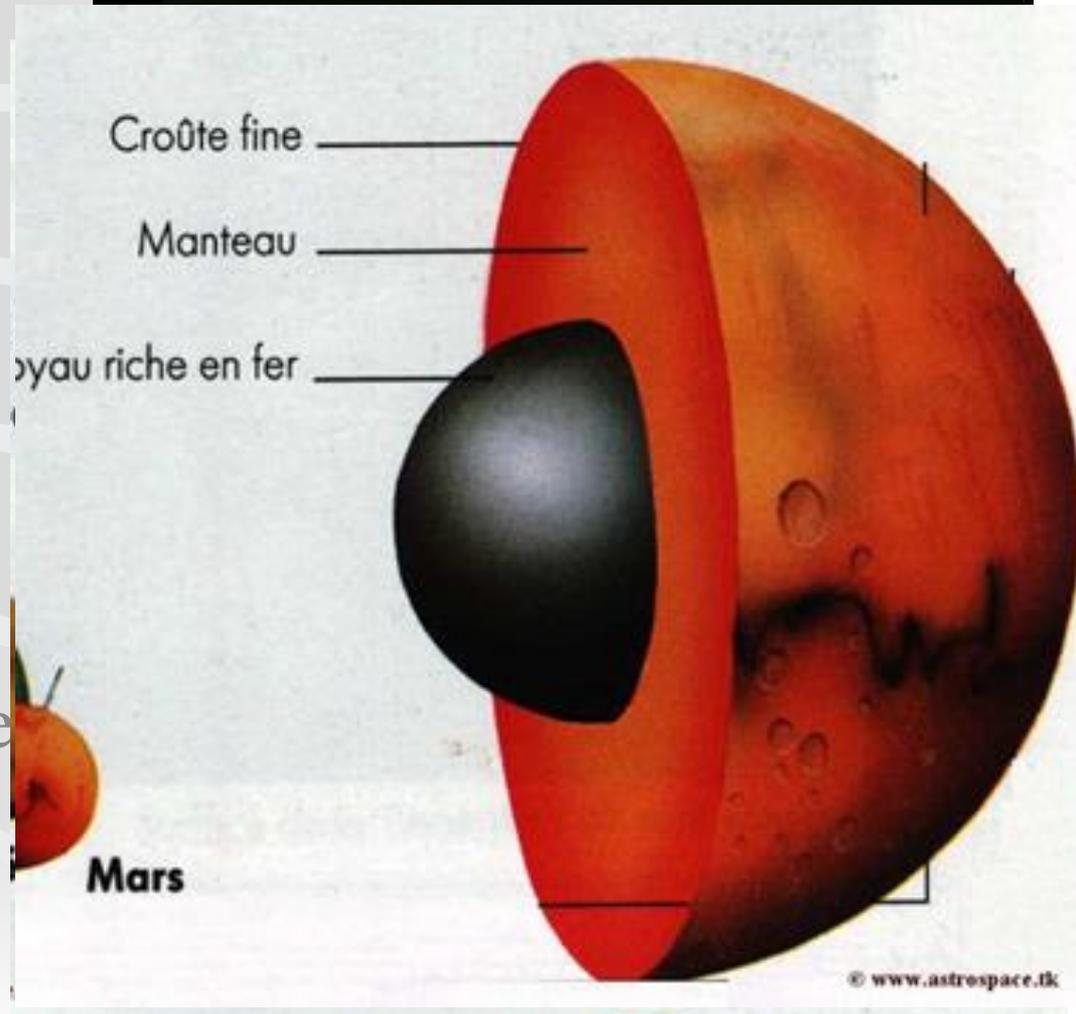
Le Soleil

- **Etoile banale**, de type G2
- Masse = 332000 Terres
- Température de surface : 5790 K (au centre 15 millions)
- Rayon : 695980 km
- Composition : Hydrogène (75 %), Hélium... : **Objet gazeux**
- Source d'énergie : Réactions thermonucléaires au centre
- Age : 5 milliards d'années

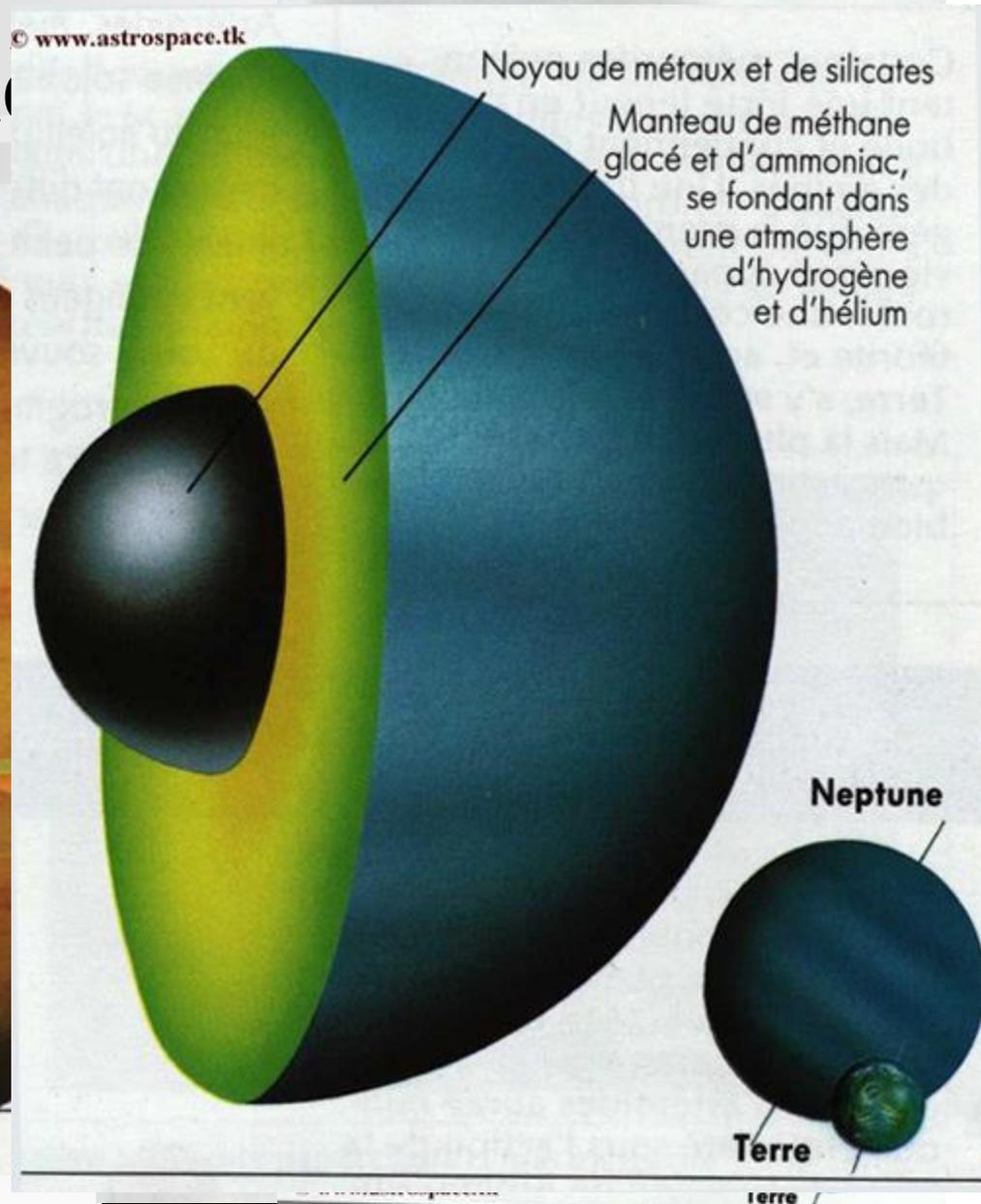
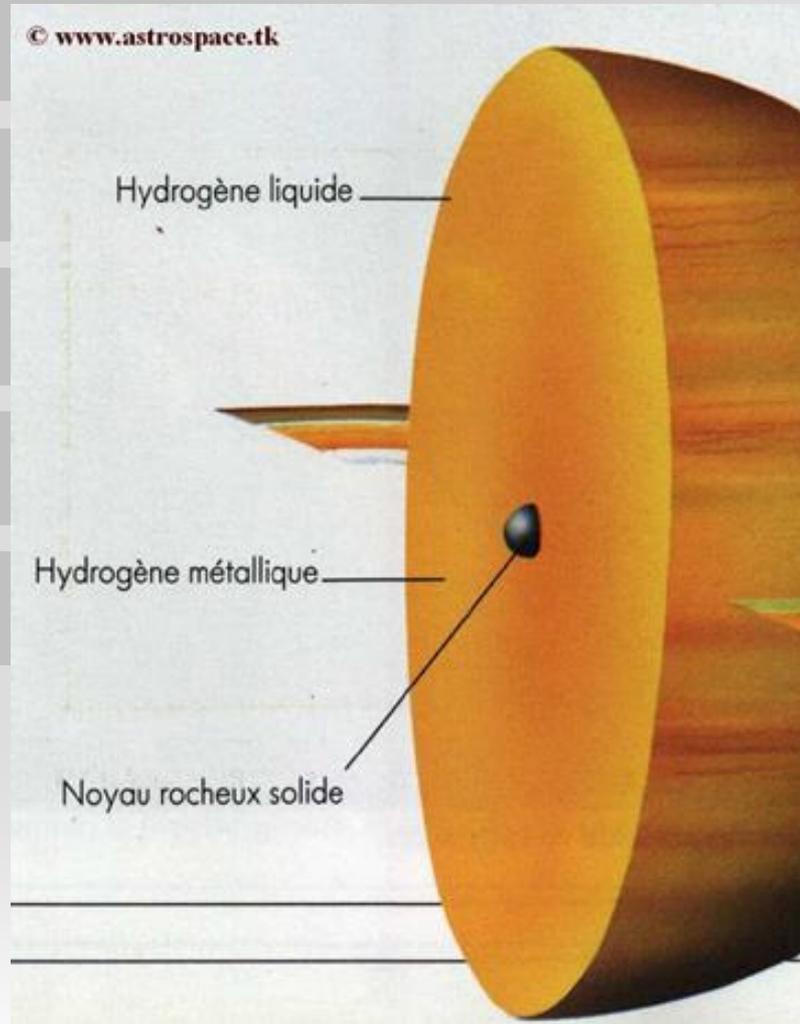


Les planètes telluriques

- Rayon < 6000 km
- **Densité élevée**
- ($\geq 3 \text{ g} \cdot \text{cm}^{-3}$)
- Objets solides – liquides
- Composition : roches silicatées et métaux (cœur de fer)



Les planètes



Les interactions dans le système solaire

- L'ensemble est en **rotation différentielle** autour du Soleil. Toute l'évolution est régie par un certain nombre d'**interactions**.
- La **gravitation** : Toujours présente, l'interaction avec l'étoile centrale domine.
- Les **processus radiatifs** : Le rayonnement stellaire agit sur la matière (au début il y a de l'opacité...).
- Les **collisions** : Les collisions entre corps (astéroïdes, planètes...) induisent une évolution (surtout vrai au début)
- Les **processus magnétiques** : Le champ magnétique des planètes interagit avec le vent solaire ⇔ magnétosphères.

La gravitation est le principal moteur d'évolution d'un système planétaire (agit sur le long terme)

Gravitation – Mécanique céleste

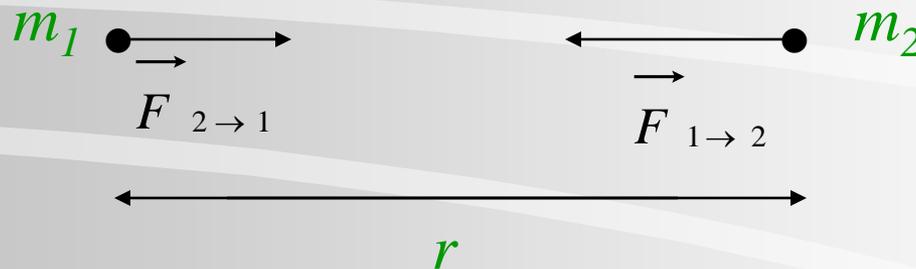
1. L'interaction de gravitation
 - La gravitation universelle
 - Le potentiel gravitationnel
 - Le théorème de Gauss
 - Le potentiel d'un corps étendu

L'interaction de gravitation

- La force de gravitation est **la plus faible** des forces fondamentales.
- Mais c'est la seule qui est toujours attractive et qui agit à grande distance ($\propto r^{-2}$) \Rightarrow **C'est elle qui régit les interactions à grande distance dans l'Univers**
 - Les forces électromagnétiques sont écrantées à grand distance par la neutralité;
 - Les forces nucléaires n'agissent qu'à très courte distance ($\propto e^{-r}$)
- Elle vérifie le **principe d'équivalence** : Elle est proportionnelle à la masse \Leftrightarrow **masse grave = masse inerte**
 - Vérifié expérimentalement à mieux que 10^{-17} près

La gravitation universelle (Newton 1687)

- Deux corps ponctuels de masses m_1 et m_2 s'attirent en raison inverse de leur distance r :



$$F_{2 \rightarrow 1} = F_{1 \rightarrow 2} = \frac{G \times m_1 \times m_2}{r^2}$$

- G = Constante de la gravitation = $6.6732 \times 10^{-11} \text{ m}^3 \text{ s}^{-2} \text{ kg}^{-1}$
- Force petite, à longue portée, toujours attractive, inexacte
 - Théorie plus exacte : Relativité Générale (Einstein 1916)

Le potentiel gravitationnel

- La force de gravitation dérive d'une énergie potentielle

$$E_{p,1\leftrightarrow 2} = - \frac{G \times m_1 \times m_2}{r}$$

- On place l'origine du repère à la masse 1, on raisonne en coordonnées sphériques (r, θ, φ) . La force $F_{1\rightarrow 2}$ s'écrit :

$$\left\{ \begin{array}{l} F_r = - \frac{Gm_1 m_2}{r^2} = - \frac{\partial}{\partial r} \left(- \frac{Gm_1 m_2}{r} \right) \\ F_\theta = 0 = - \frac{1}{r} \frac{\partial}{\partial \theta} \left(- \frac{Gm_1 m_2}{r} \right) \\ F_\varphi = 0 = - \frac{1}{r \sin \theta} \frac{\partial}{\partial \varphi} \left(- \frac{Gm_1 m_2}{r} \right) \end{array} \right. \Leftrightarrow \vec{F} = - \vec{\nabla} \left(- \frac{Gm_1 m_2}{r} \right)$$

- Le potentiel gravitationnel créé par m_1 , c'est E_p/m_2

$$U(r) = - \frac{Gm_1}{r}$$

Théorème de Gauss

- Une distribution continue de matière de masse volumique ρ crée le potentiel

$$U(\vec{r}) = - \iiint \frac{G \rho(\vec{r}')}{|\vec{r}' - \vec{r}|} d^3\vec{r}'$$

- Cette équation peut s'inverser pour donner l'équation de Poisson

$$\Delta U(\vec{r}) = -\vec{\nabla} \cdot \vec{g}(\vec{r}) = 4\pi G \rho(\vec{r})$$

- **Théorème de Gauss** : *Le flux du champ gravitationnel à travers une surface fermée est égal à $-4\pi G$ × la masse à l'intérieur*
- Se démontre avec Ostrogradsky :

$$\iint_S \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = \iiint_V \vec{\nabla} \cdot \vec{g}(\vec{r}) d^3\vec{r} = -4\pi G \iiint_V \rho(\vec{r}) d^3\vec{r} = -4\pi GM$$

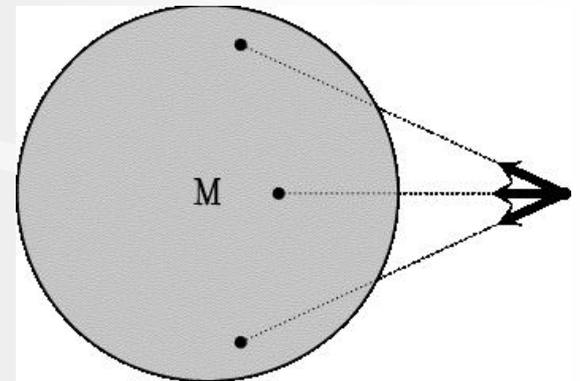
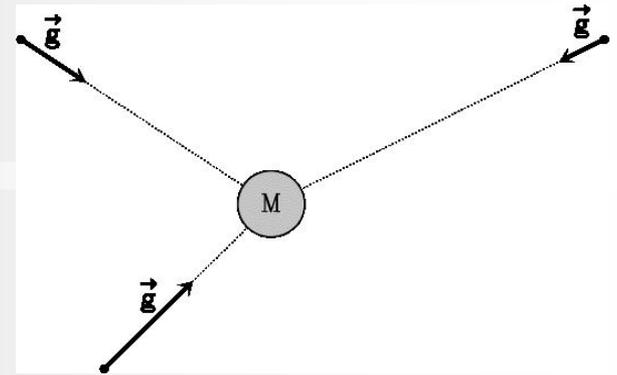
Potentiel d'un corps étendu

- Pour un corps étendu de symétrie sphérique, le champ $g(r)$ est nécessairement radial dirigé vers le centre.

$$\iint_s \vec{g}(\vec{r}) \cdot d\vec{S} = 4\pi r^2 g(r) = -4\pi GM$$

$$\Rightarrow g(r) = -\frac{GM}{r^2} \Leftrightarrow U(r) = -\frac{GM}{r}$$

- C'est la même expression que pour un corps ponctuel !
- Si le corps n'a pas la symétrie sphérique, on développe le potentiel en **harmoniques sphériques**



Potentiel d'un corps étendu

- Développement en harmoniques sphériques :

$$U(r, \theta, \varphi) =$$

$$- \frac{GM}{r} \left\{ 1 + \sum_{n=2}^{+\infty} \left(\frac{R_e}{r} \right)^n \left[-J_n P_n(\cos \theta) + \sum_{p=1}^n P_n^{(p)}(\cos \theta) [c_{n,p} \cos p\varphi + s_{n,p} \sin p\varphi] \right] \right\}$$

- Les P_n sont les **Polynômes et fonctions de Legendre**.

$$P_n(s) = \frac{1}{2^n n!} \frac{d^n}{ds^n} (s^2 - 1)^n \quad P_n^{(p)}(s) = \frac{(1 - s^2)^{p/2}}{2^n n!} \frac{d^{n+p}}{ds^{n+p}} (s^2 - 1)^n$$

- Les J_n , $c_{n,p}$ et $s_{n,p}$ sont des coefficients numériques. **Pour la Terre :**

$J_2 = 1,082625 \times 10^{-3}$	(aplatissement polaire)	
$J_3 = -2,534 \times 10^{-6}$	$c_{2,2} = 1,571 \times 10^{-6}$	$s_{2,2} = -0,903 \times 10^{-6}$
$J_4 = -1,623 \times 10^{-6}$	$c_{3,1} = 2,190 \times 10^{-6}$	$s_{3,1} = 0,272 \times 10^{-6}$

Gravitation – Mécanique céleste

2. Eléments de mécanique Hamiltonienne

- Mécanique Lagrangienne
- Mécanique Hamiltonienne
- Transformations canoniques

Mécanique Lagrangienne

- On suppose un système décrit par n coordonnées généralisées $(q_i)_{1 \leq i \leq n}$
- On montre que le principe fondamental de la dynamique est équivalent aux n équations scalaires suivantes ($j =$ indice de particule)

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial T}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial T}{\partial q_i} = Q_i = \sum_j \vec{F}_j \cdot \frac{\partial \vec{r}_j}{\partial q_i}$$

- T est l'énergie cinétique et les Q_i sont les accélérations généralisées.
- Si les forces dérivent d'un potentiel U , on a alors $Q_i = -\partial U / \partial q_i$. Les équations se réécrivent

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \right) - \frac{\partial L}{\partial q_i} = 0 \quad \text{avec} \quad L = T - U$$

- On peut déduire ces équations du principe de moindre action : Entre t_1 et t_2 , le mouvement réalisé minimise l'action sur tous les chemins possibles.
- L est le Lagrangien. Intérêt : On a troqué des équations vectorielles contre des équations scalaires. La seule difficulté est d'exprimer l'énergie cinétique et le potentiel en fonction des coordonnées généralisées.

$$A = \int_{t_1}^{t_2} L(Q, \dot{Q}, t) dt$$

Mécanique Hamiltonienne

- On peut encore transformer les équations de Lagrange. On associe à chaque coordonnée q_i un moment conjugué p_i , défini par

$$p_i = \frac{\partial L}{\partial \dot{q}_i} \quad \Rightarrow \quad \frac{d p_i}{d t} = \frac{\partial L}{\partial q_i}$$

- Si q_i est une longueur, p_i a la dimension d'une quantité de mouvement. Si q_i est un angle, p_i a la dimension d'un moment cinétique (variables conjuguées angle-action)
- On introduit maintenant le **Hamiltonien**

$$H(q_1, \dots, q_n, p_1, \dots, p_n) = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - L$$

- Les équations de Lagrange équivalent alors aux $2n$ équations canoniques

$$\frac{d q_i}{d t} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \text{et} \quad \frac{d p_i}{d t} = \frac{\partial L}{\partial q_i} = - \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

- On a aussi $dH/dt = -\partial L/\partial t$. Si le système est conservatif, H est une constante du mouvement et représente l'énergie totale $H=T+U$

Mécanique Hamiltonienne

- Exemple 1 : Coordonées cartésiennes potentiel ($q_1=x, q_2=y, q_3=z$), potentiel $U(q_1, q_2, q_3)$. On a

$$p_i = m \dot{q}_i \quad ; \quad H = T + U = \frac{1}{2m} \sum_{i=1}^3 p_i^2 + U(q_1, q_2, q_3)$$

$$\frac{dq_i}{dt} = \frac{p_i}{m} = \frac{\partial H}{\partial p_i} \quad \frac{dp_i}{dt} = m \ddot{q}_i = - \frac{\partial U}{\partial q_i} = - \frac{\partial H}{\partial q_i}$$

- Exemple 2 : Mouvement à force centrale, potentiel $U(r)$, coordonnées polaires (r, θ)

$$T = \frac{1}{2} m (\dot{r}^2 + r^2 \dot{\theta}^2), \quad p_r = m \dot{r}, \quad p_\theta = m r^2 \dot{\theta}, \quad H = \frac{1}{2m} \left(p_r^2 + \frac{p_\theta^2}{r^2} \right) + U(r)$$

$$\frac{dr}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_r} = \frac{p_r}{m} \quad \frac{dp_r}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial r} = - \frac{p_\theta^2}{m r^3} - \frac{\partial U(r)}{\partial r}$$

$$\frac{d\theta}{dt} = \frac{\partial H}{\partial p_\theta} = \frac{p_\theta}{m r^2} \quad \frac{dp_\theta}{dt} = - \frac{\partial H}{\partial \theta} = 0$$

Transformations canoniques

- Une transformation canonique = Passage d'un premier jeu de variables conjuguées $(q_i, p_i)_{1 \leq i \leq n}$ à un autre $(q'_i, p'_i)_{1 \leq i \leq n}$ tel que les équations du même système dynamique aient encore la forme canonique Hamiltonienne dans le nouveau jeu de variables.

$$\frac{d q'_i}{d t} = \frac{\partial H'}{\partial p'_i} \quad \frac{d p'_i}{d t} = - \frac{\partial H'}{\partial q'_i}$$

- Le Hamiltonien peut changer...
- Le caractère canonique de la transformation ne dépend pas du Hamiltonien, seulement de la forme de la transformation.
- **Intérêt** : Trouver une transformation canonique telle que dans les nouvelles variables, le Hamiltonien dépend d'un minimum de variables. Par exemple $H(-, -, -, p_1, p_2, p_3)$. Dans ce cas

$$\frac{d p_i}{d t} = - \frac{\partial H}{\partial q_i} = 0 \Rightarrow p_i = \text{cte} \quad ; \quad \frac{d q_i}{d t} = \frac{\partial H}{\partial p_i} = \text{cte} \Rightarrow q_i = \text{cte} \times t + K_i$$

- Ca c'est l'idéal. Dans ce cas le problème est résolu. Ce n'est pas toujours possible....

Transformations canoniques

- **Théorème** : Une transformation $(q_i, p_i)_{1 \leq i \leq n} \rightarrow (q'_i, p'_i)_{1 \leq i \leq n}$ est canonique si et seulement si il existe une fonction F tel que la forme différentielle

$$\sum_{i=1}^n (p_i dq_i - p'_i dq'_i) + F dt$$

soit une différentielle exacte $dS(Q, Q', t)$. Dans ce cas le nouvel Hamiltonien vérifie $H' = H + F$.

- On a donc
$$\sum_{i=1}^n (p_i dq_i - p'_i dq'_i) + (H' - H) dt = dS(Q, Q', t)$$

$$\Rightarrow p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad p'_i = -\frac{\partial S}{\partial q'_i}, \quad H' = H + \frac{\partial S}{\partial t}$$

- La fonction S est appelée **fonction génératrice** de la transformation.
- Si S ne dépend pas explicitement du temps, la transformation est dite conservative et $H = H'$.
- Avec S en fonction des q_i et q'_i , on en déduit les p_i et p'_i .

Transformations canoniques

- On peut déduire le théorème du principe de moindre action

$$\delta A = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} L(q_i, \dot{q}_i, t) dt \right) = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H \right) dt \right) = 0$$

$$\delta A' = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} L(q'_i, \dot{q}'_i, t) dt \right) = \delta \left(\int_{t_1}^{t_2} \left(\sum_{i=1}^n p'_i \dot{q}'_i - H' \right) dt \right) = 0$$

- On aura $\delta A = \delta A'$ si les intégrands de A et A' diffèrent d'une différentielle exacte dS , c'est-à-dire

$$\sum_{i=1}^n (p_i dq_i - p'_i dq'_i) + (H' - H) dt = dS$$

- Le choix de $S(q_i, q'_i)$ n'est pas le seul possible.

$$S(Q, P') \Rightarrow \sum_{i=1}^n (p_i dq_i + q'_i dp'_i) + (H' - H) dt = dS(Q, P')$$

$$S(P, Q') \Rightarrow \sum_{i=1}^n (-q_i dp_i - p'_i dq'_i) + (H' - H) dt = dS(P, Q')$$

$$S(P, P') \Rightarrow \sum_{i=1}^n (-q_i dp_i + q'_i dp'_i) + (H' - H) dt = dS(P, P')$$

Transformations canoniques: exemples

- **Exemple 1:** Passage en coordonnées polaires. On pose $p_i/q_i = \tan p'_i$.
Que vaut q'_i ? On prend

$$S(Q, P') = \sum_i \frac{1}{2} q_i^2 \tan^2 p'_i \Rightarrow p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i} = q_i \tan p'_i$$

$$q'_i = \frac{\partial S}{\partial p'_i} = \frac{1}{2} q_i^2 (1 + \tan^2 p'_i) = \frac{1}{2} (p_i^2 + q_i^2)$$

$$\text{donc } q_i = \sqrt{2 q'_i} \cos p'_i \quad \text{et} \quad p_i = \sqrt{2 q'_i} \sin p'_i$$

- **Exemple 2 :** transformation linéaire $Q' = A Q$. On prend

$$S(P, Q') = - {}^t P A^{-1} Q' = - \sum_{i=1}^n \sum_{k=1}^n a_{i,k}^{-1} p_i q'_k$$

$$q_i = - \frac{\partial S}{\partial p_i} = \sum_{k=1}^n a_{i,k}^{-1} q'_k = (A^{-1} Q')_i \quad p'_k = - \frac{\partial S}{\partial q'_k} = \sum_{i=1}^n a_{i,k}^{-1} p_i = ({}^t A^{-1} P)_k$$

$$\text{Donc } P' = {}^t A^{-1} P$$

Théorie de Hamilton-Jacobi

- **Idée** : trouver la bonne transformation canonique (donc la bonne fonction génératrice pour avoir le Hamiltonien H' le plus simple possible
- Prenons $S(Q, P')$. Les équations de base sont

$$p_i = \frac{\partial S}{\partial q_i}, \quad q'_i = \frac{\partial S}{\partial p'_i}, \quad H' = H + \frac{\partial S}{\partial t} \Rightarrow H' = H(Q, \frac{\partial S}{\partial Q}, t) + \frac{\partial S}{\partial t}$$

- Ceci constitue **l'équation d'Hamilton-Jacobi**. On cherche en général une transformation conservative, et telle que le Hamiltonien H' soit intégrable

$$H'(-, P') \Rightarrow p'_i = \text{cte} \quad ; \quad \frac{\partial H'}{\partial p'_i} = \text{cte} = \lambda_i \Rightarrow q'_i = \lambda_i t + K_i \Rightarrow H' = \sum_i \lambda_i p'_i$$

- L'équation d'Hamilton-Jacobi s'écrit alors $H(Q, \frac{\partial S}{\partial Q}, t) = \sum_i \lambda_i p'_i$
- On cherche même souvent $H'=0$. S est solution d'une équation aux dérivées partielles, pas forcément facile à résoudre.
- Dans le dernier cas, on a

$$\sum_{i=1}^n \left(p_i \frac{dq_i}{dt} + q'_i \frac{dp'_i}{dt} \right) + (H' - H) = \frac{dS}{dt} = \sum_{i=1}^n p_i \dot{q}_i - H = L$$

- S est l'action du système !

Gravitation – Mécanique céleste

3. Le problème des 2 corps et les lois de Képler
 1. Le problème des N corps
 2. Le problème des 2 corps
 3. Les lois de Képler : énoncé, résolution
 4. Les éléments d'orbite
 5. Formulation Hamiltonienne

Le problème des N corps

= *Trouver le mouvement de N points matériels d'attirant mutuellement selon la loi de Newton*

- N petit ($\lesssim 100$): Mécanique Céleste : On décrit le mouvement de **chaque** point.
- N grand: Dynamique stellaire : On ne s'intéresse qu'aux propriétés **statistiques** du système.

- Equation de base:

$$\left(m_i, \vec{r}_i \right)_{i=1 \dots N} \quad m_i \ddot{\vec{r}}_i = \sum_{\substack{j=1 \\ j \neq i}}^N \frac{G m_i m_j (\vec{r}_j - \vec{r}_i)}{\left| \vec{r}_j - \vec{r}_i \right|^3}$$

- Tout est là : Système différentiel d'ordre $6N$
- On ne connaît de solution exacte que pour $N=2 \Rightarrow$ lois de Képler
- Pour $N>2$, on a quelques intégrales premières globales : **10 constantes**

- Centre de gravité : $\sum_{i=1}^N m_i \ddot{\vec{r}}_i = 0 \Rightarrow \sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i = \vec{A} t + \vec{B}$

- Moment cinétique $\sum_{i=1}^N m_i \vec{r}_i \wedge \dot{\vec{r}}_i = \vec{L}$

- Energie $\sum_{i=1}^N \frac{1}{2} m_i \dot{\vec{r}}_i^2 - \sum_{i < j} \frac{G m_i m_j}{\left| \vec{r}_j - \vec{r}_i \right|} = E$

Le problème des 2 corps

⇒ *C'est le seul pour lequel on connaît une solution exacte*

- Equations pour les deux corps
$$m_1 \ddot{\vec{r}}_1 = \frac{Gm_1 m_2}{r^2} \vec{u} \quad , \quad m_2 \ddot{\vec{r}}_2 = - \frac{Gm_1 m_2}{r^2} \vec{u}$$

- $r = |\vec{r}_1 - \vec{r}_2|$, \vec{u} = vecteur unitaire dans la direction 1 → 2

- On fait la différence
$$\ddot{\vec{r}} = \ddot{\vec{r}}_2 - \ddot{\vec{r}}_1 = - \frac{G(m_1 + m_2)}{r^2} \vec{u} = - \frac{G(m_1 + m_2)}{r^3} \vec{r}$$

- C'est le problème Képlérien :

$$\ddot{\vec{r}} = - \frac{\mu}{r^3} \vec{r}$$

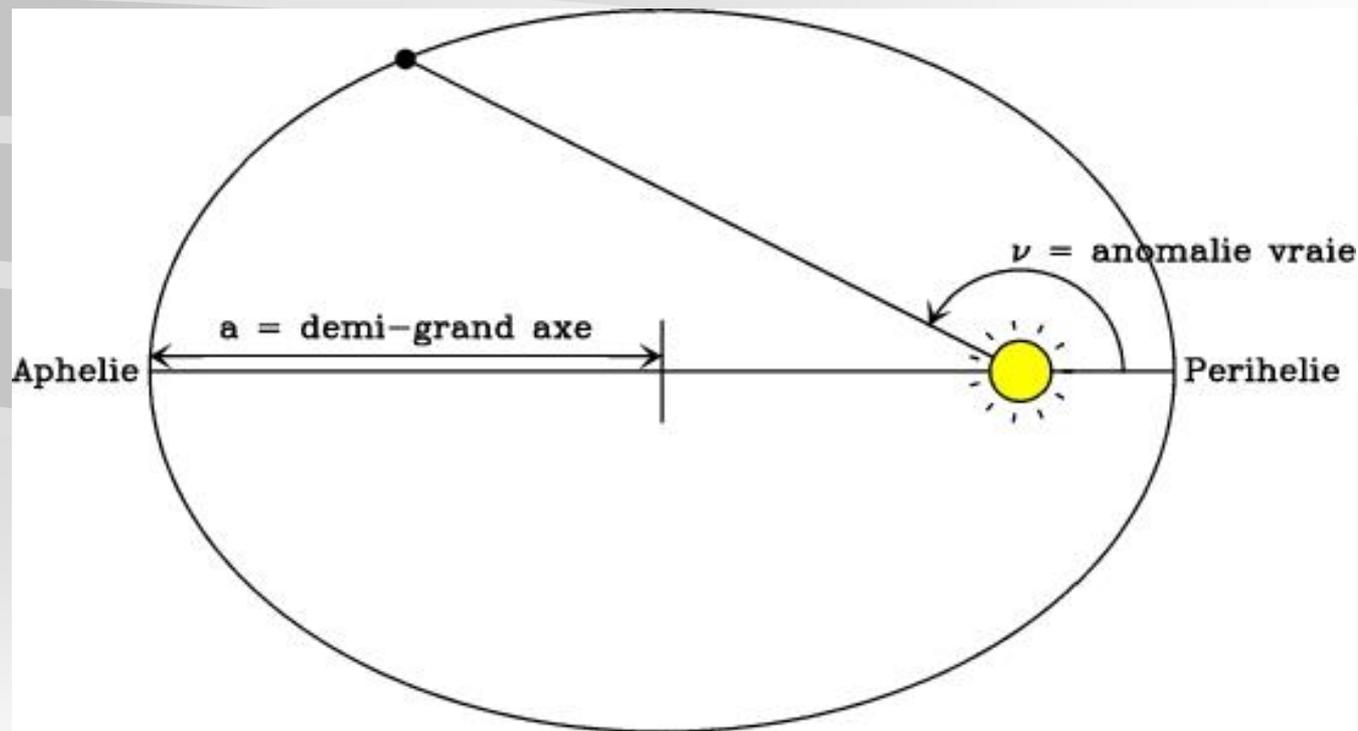
- La résolution du problème relatif est équivalente à celle d'un point matériel attiré par un centre massif de masse $m_1 + m_2$. La résolution de ce problème conduit aux **Lois de Képler**.
- Il y a plusieurs méthodes de résolution : Formules de Binet, intégrales premières, etc...

Les lois de Képler

- Elles **découlent** de la loi de la gravitation universelle, et régissent le mouvement relatif de **deux corps** qui s'attirent selon la loi de Newton
- Elles ont été découvertes **expérimentalement** par Képler **avant** la formulation de la gravitation universelle par Newton.
- Elles décrivent le **mouvement des planètes** avec une assez bonne **approximation**.

Les lois de Képler : loi 1

- Les planètes décrivent des **ellipses** dont le Soleil occupe un des **foyers**.



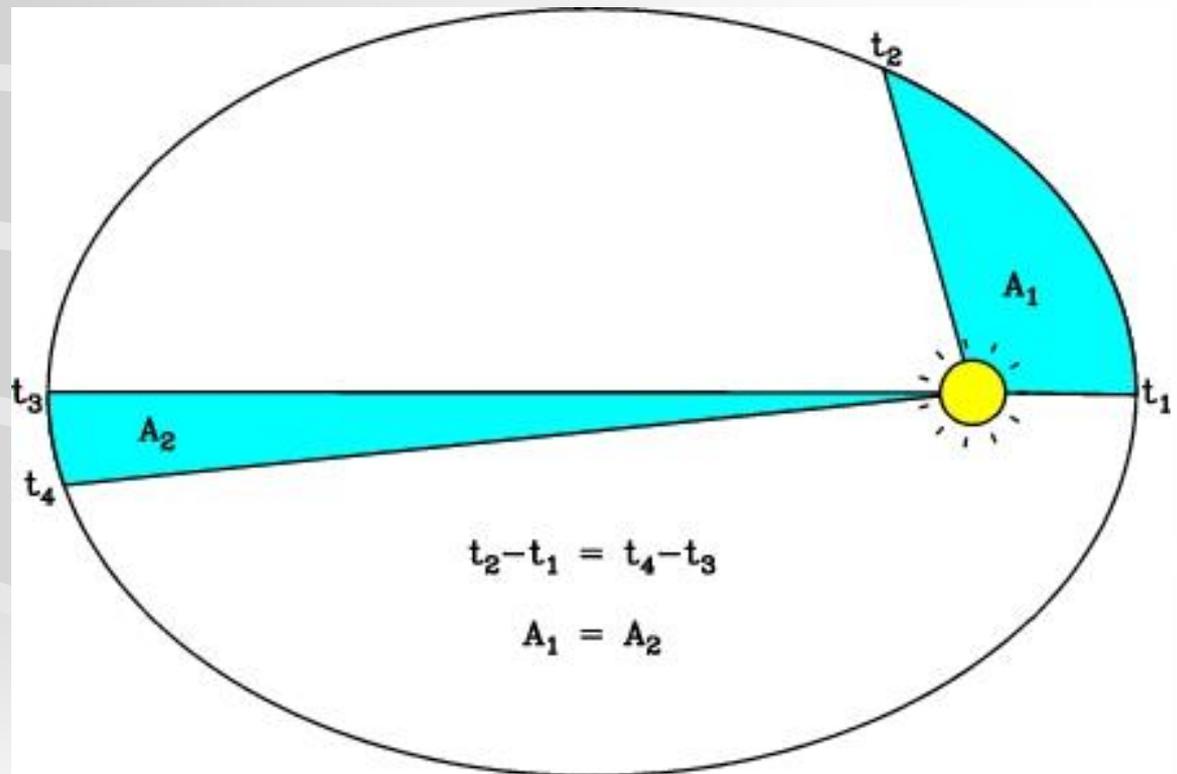
Les lois de Képler : loi 2 (loi des aires)

- Le rayon vecteur qui joint le Soleil à la planète balaie des **aires égales en des temps égaux**

Cette loi est **équivalente** à la conservation du **moment cinétique**

$$L = m r^2 \frac{d v}{d t}$$

= constante



Les lois de Képler : loi 3

- Les carrés des **périodes orbitales** des planètes sont proportionnels aux cubes des **demi-grands axes**

$$\frac{T^2}{a^3} = \text{constante} \quad \left(= \frac{4\pi^2}{\mu} = \frac{4\pi^2}{G(M_{\odot} + m)} \approx \frac{4\pi^2}{GM_{\odot}} \right)$$

Planète	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune	Pluton
a (UA)	0.387	0.723	1.000	1.523	5.203	9.539	19.191	30.061	39.529
T (ans)	0.241	0.615	1.000	1.881	11.86	29.46	84.01	164.79	247.7
T^2 / a^3	1.0001	1.0001	1.0000	1.0001	0.9991	0.9998	0.9985	0.9997	0.9933

Résolution résumée du problème des 2 corps

Par les intégrales premières

- Energie : $\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} = -\vec{\nabla} \left(-\frac{\mu}{r} \right) \Rightarrow h = \frac{1}{2} \dot{r}^2 - \frac{\mu}{r} = \text{Cte}$
- Moment cinétique : $\vec{r} \wedge \ddot{\vec{r}} = \frac{d}{dt} (\vec{r} \wedge \dot{\vec{r}}) = 0 \Rightarrow \vec{C} = \vec{r} \wedge \dot{\vec{r}} = \vec{C} \text{ te}$
- Conséquence $(\vec{r}, \dot{\vec{r}}) \perp \vec{C} \Rightarrow$ Le mouvement est plan $\perp \vec{C}$
- Dans le plan $C = r^2(d\theta/dt) \Rightarrow$ Loi des aires (Loi de Kepler n°2)

• Une autre intégrale première (Laplace) :

$$\frac{d}{dt} \left(\frac{\dot{\vec{r}} \wedge \vec{C}}{\mu} - \frac{\vec{r}}{r} \right) = 0 \Rightarrow \vec{E} = \frac{\dot{\vec{r}} \wedge \vec{C}}{\mu} - \vec{u} = \vec{C} \text{ te} \quad \left(\vec{u} = \frac{\dot{\vec{r}}}{r} \right)$$

- On tire : $r = \frac{C^2 / \mu}{1 + \vec{E} \cdot \vec{u}}$
- Ensuite on appelle $e = |\vec{E}|$, $\theta = (\vec{u}, \vec{E})$, $p = \frac{C^2}{\mu} \Rightarrow r = \frac{p}{1 + e \cos \theta}$
- C'est l'équation polaire de la trajectoire, une conique rapportée à un de ses foyers, d'excentricité e . (Loi de Kepler n°1)

Résolution résumée du problème des 2 corps

- On montre aussi que

$$p \dot{r} = \vec{C} \wedge (\vec{u} + \vec{E}) \Rightarrow e^2 = 1 + \frac{2hp}{\mu}$$

- On a donc trois cas :

- $h < 0 \Leftrightarrow e < 1$: La trajectoire est une **ellipse**. Les deux objets sont liés gravitationnellement. Le mouvement est périodique.
- $h = 0 \Leftrightarrow e = 1$: La trajectoire est une **parabole**, parcourue une fois. La vitesse relative est nulle à l'infini
- $h > 0 \Leftrightarrow e > 1$: La trajectoire est une **hyperbole**, parcourue une fois. La vitesse relative est non nulle à l'infini.

- Dans le cas elliptique, on introduit $a = p/(1-e^2) = -\mu/2h$, le demi-grand axe.

- On introduit le moyen mouvement

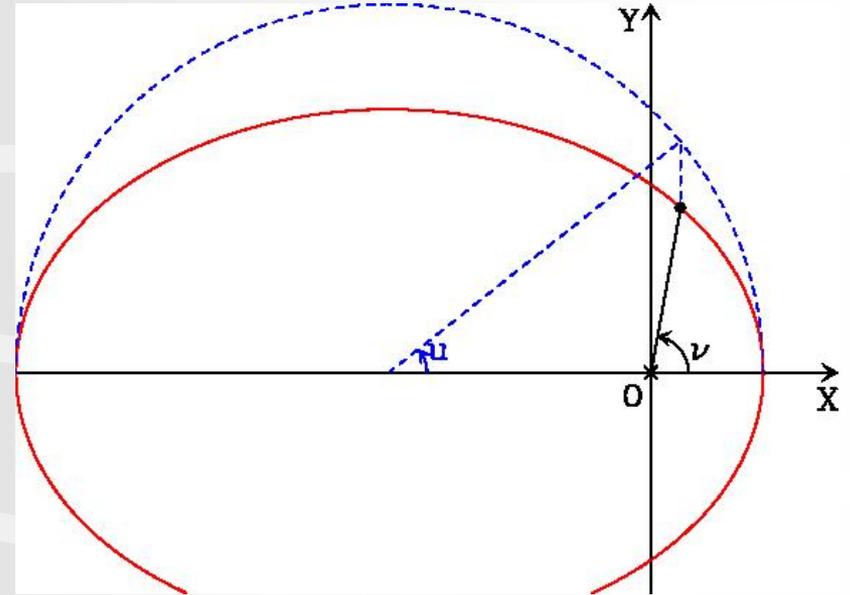
$$n = -\frac{2h\sqrt{-2h}}{\mu} \Leftrightarrow n^2 a^3 = \mu$$

- On montre que la période du mouvement est $T = 2\pi/n$, ce qui se traduit par la troisième loi de Kepler

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2}{\mu} = \frac{4\pi^2}{G(m_1 + m_2)}$$

Formulaire Képlerien (elliptique)

- On se place dans le repère propre
- On introduit
 - L'anomalie vraie ν = angle polaire
 - L'anomalie excentrique u
 - L'anomalie moyenne $M = n(t-t_p)$
- Lien $M \leftrightarrow u \leftrightarrow \nu$:



$$M = n(t - t_p) = u - e \sin u$$

(Equation de Képler)

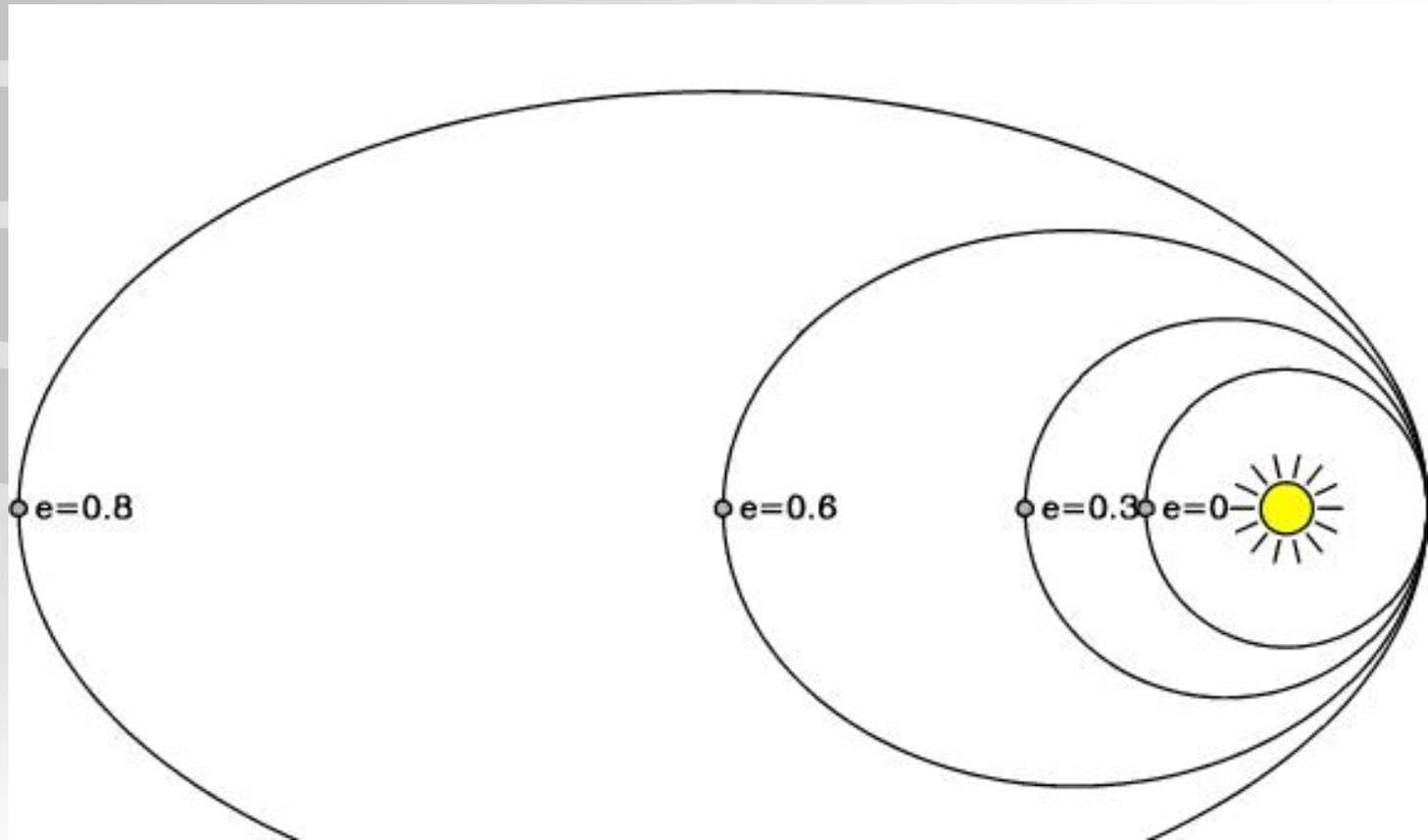
$$\cos \nu = \frac{\cos u - e}{1 - e \cos u} \quad \sin \nu = \frac{\sqrt{1 - e^2} \sin u}{1 - e \cos u} \quad \tan^2 \frac{\nu}{2} = \frac{1 + e}{1 - e} \tan^2 \frac{u}{2}$$

$$r = \frac{a(1 - e^2)}{1 + e \cos \nu} = a(1 - e \cos u) = a \frac{dM}{du} \quad X = r \cos \nu = a(\cos u - e)$$

$$\dot{X} = -\frac{na^2}{r} \sin u \quad \dot{Y} = \frac{na^2}{r} \sqrt{1 - e^2} \cos u \quad Y = r \sin \nu = a \sqrt{1 - e^2} \sin u$$

Excentricité des orbites

- Les orbites planétaires ne sont pas des cercles, mais des **ellipses**...



Les éléments d'orbite

Le demi-grand axe et l'excentricité ne suffisent pas pour décrire entièrement l'orbite d'un astre. Il faut des angles pour préciser la position de l'ellipse dans l'espace

a = demi-grand axe

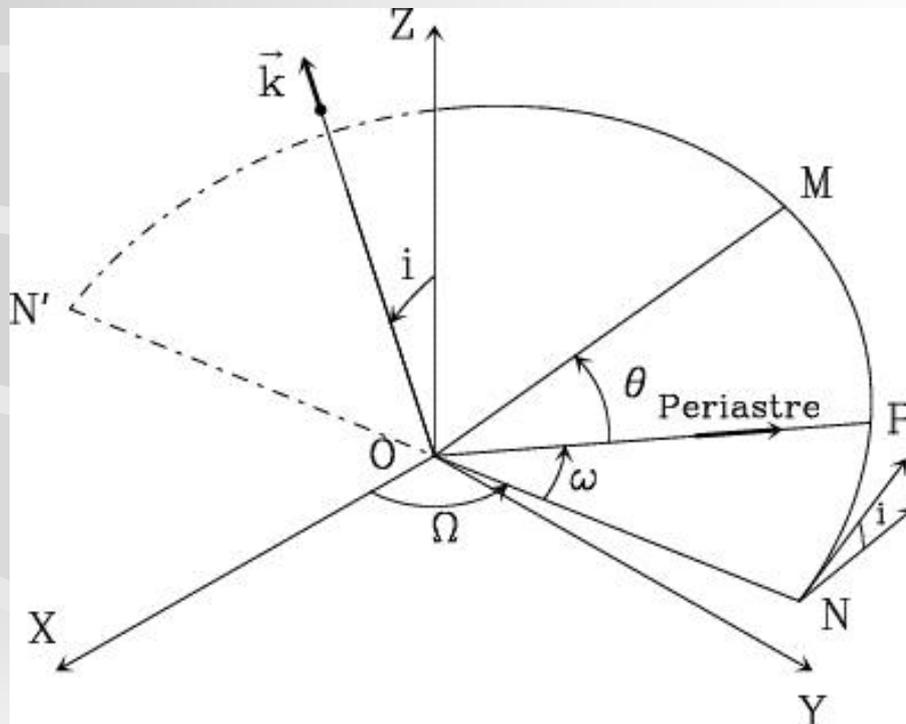
e = excentricité

i = inclinaison

Ω = Longitude du nœud ascendant

ω = Argument du périastre

t_p = Temps de passage au périastre



Excentricités et inclinaisons

- Dans le Système Solaire, les **excentricités** et les **inclinaisons** des planètes sont **petites** : Le système est ~ **plan** et tourne rond !

Planète	Mercure	Vénus	Terre	Mars	Jupiter	Saturne	Uranus	Neptune	Pluton
e	0.2056	0.0068	0.0167	0.0933	0.048	0.056	0.046	0.010	0.2488
i (degrés)	7.00	3.39	0	1.85	1.31	2.49	0.77	1.77	17.15

Formulation Hamiltonienne du problème Képlérien

- **Problématique** : Peut-on trouver un jeu de variables canoniquement conjuguées où la formulation du problème Képlérien est particulièrement simple ? **Oui, par un jeu de transformations canoniques** à partir des variables conjuguées positions – impulsions.
- **Idée** : les éléments orbitaux peuvent être considérés comme des « coordonnées » dans l'espace des phases au même titre que les variables positions – impulsions.
- A chaque jeu (\vec{r}, \vec{v}) correspond un jeu d'éléments $(a, e, i, \Omega, \omega, t_p)$, constants dans le cas Képlérien, variables dans les autres cas. On parle **d'orbite osculatrice**.
- **Difficulté** : Les éléments orbitaux ne sont pas conjugués. Mais ceux-ci le sont. Ce sont les

éléments de Delaunay

$$\left(\begin{array}{l} q_1 = M \quad \leftrightarrow \quad p_1 = L = \sqrt{\mu a} \\ q_2 = \omega \quad \leftrightarrow \quad p_2 = G = L \sqrt{1 - e^2} \\ q_3 = \Omega \quad \leftrightarrow \quad p_3 = \Theta = G \cos i \end{array} \right)$$

Formulation Hamiltonienne du problème Képlérien

- On écrit le Hamiltonien dans les éléments de Delaunay

$$H = -\frac{\mu}{2a} = -\frac{\mu^2}{2L^2} = H(-, -, -, L, -, -)$$

- H ne dépend que d'un seul moment, L ! Donc les trois moments L, G, Θ sont constants, ainsi que les coordonnées Ω et ω . Il ne reste qu'une équation :

$$\frac{dM}{dt} = \frac{\partial H}{\partial L} = \frac{\mu^2}{L^3}$$

- Avec $dM/dt = n$ et $L = (\mu a)^{1/2}$, on retrouve la troisième loi de Képler $n^2 a^3 = \mu$.
- Lorsque l'inclinaison et/ou l'excentricité sont petites, les éléments de Delaunay sont mal définis. On peut passer aux **éléments de Poincaré**

$$\left(\begin{array}{l} q'_1 = \lambda = \omega + \Omega + M \quad \leftrightarrow \quad p'_1 = L \\ q'_2 = -\sqrt{2(L - G)} \sin(\Omega + \omega) \quad \leftrightarrow \quad p'_2 = \sqrt{2(L - G)} \cos(\Omega + \omega) \\ q'_3 = -\sqrt{2(G - \Theta)} \sin \Omega \quad \leftrightarrow \quad p'_3 = \sqrt{2(G - \Theta)} \cos \Omega \end{array} \right)$$

Gravitation – Mécanique céleste

4. Le problème restreint des 3 corps
 - Formulation dans le repère tournant
 - La constante de Jacobi
 - Les points de Lagrange

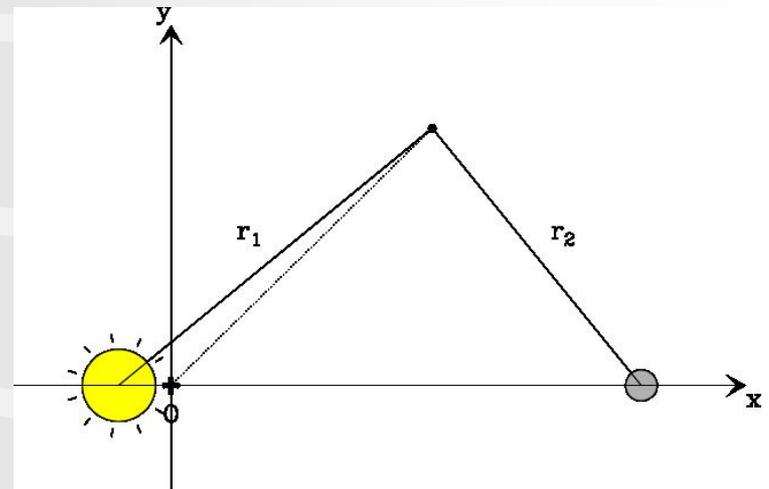
Le problème restreint des 3 corps

Les points de Lagrange

- On appelle problème *restreint* des 3 corps la situation où un des 3 corps est de **masse négligeable** (c'est une *particule test*)
- Dans ce cas, les deux autres corps suivent une orbite Képlérienne non perturbée.
- **On s'intéresse au mouvement du troisième corps.**
- On appelle problème restreint *circulaire* le cas où les deux premiers corps suivent une orbite circulaire
- **On se place dans ce cas** : Une étoile, une planète et un astéroïde de masse négligeable.

Formulation dans le repère tournant

- On raisonne dans le repère tournant où l'étoile et la planète occupent des positions fixes. Le repère tourne à la vitesse angulaire n .
- On appelle M la masse de l'ensemble, μ la masse de la planète rapportée à M , et a le demi-grand axe (rayon) de l'orbite. Par Képler, on a $n^2 a^3 = GM$



- L'astéroïde est en $\vec{r} = (x, y, z)$
- Equation de base du mouvement :

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{GM}{r_1^3} (1-\mu) \vec{r}_1 - \frac{GM}{r_2^3} \mu \vec{r}_2$$

$$m_* = M(1-\mu) \quad m_p = M\mu$$

$$\vec{r}_* = (-a\mu, 0, 0) \quad \vec{r}_p = (a(1-\mu), 0, 0)$$

$$\vec{r}_1 = \vec{r} - \vec{r}_* \quad \vec{r}_2 = \vec{r} - \vec{r}_p$$

- On tient compte de la force centrifuge et de Coriolis, $\vec{r} = x\vec{i} + y\vec{j} + z\vec{k}$ ou on écrit

$$\dot{\vec{r}} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + x\frac{d\vec{i}}{dt} + y\frac{d\vec{j}}{dt} + z\frac{d\vec{k}}{dt} = \dot{x}\vec{i} + \dot{y}\vec{j} + \dot{z}\vec{k} + nx\vec{j} - ny\vec{i}$$

Formulation dans le repère tournant

- On arrive à

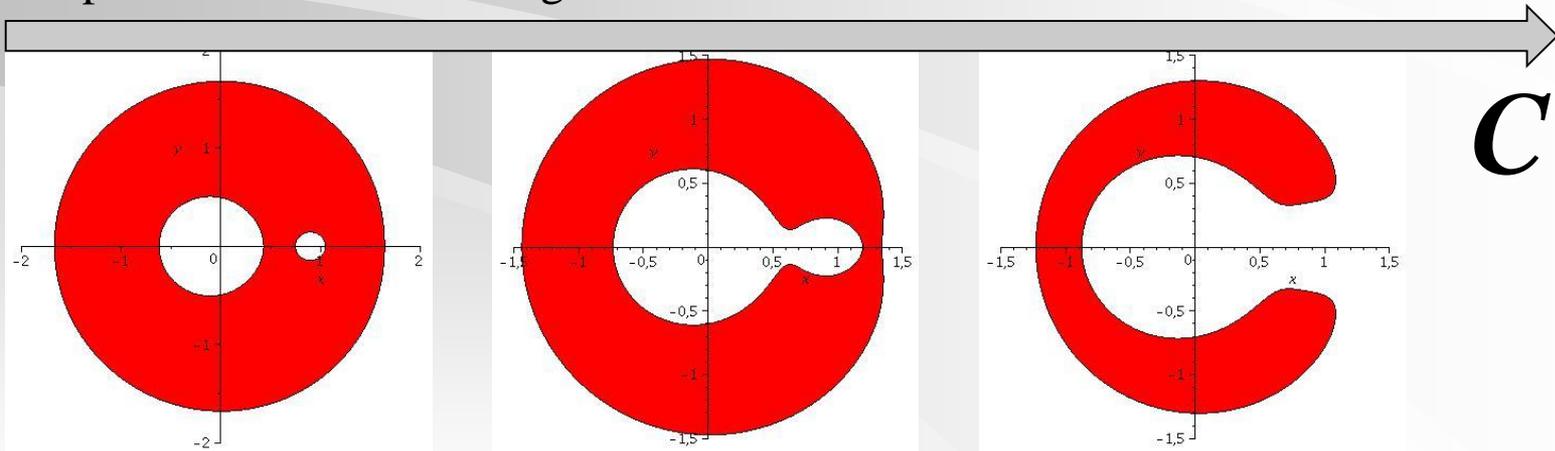
$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} - 2n\dot{y} - n^2 x = -\frac{GM(1-\mu)}{r_1^3}(x+a\mu) - \frac{GM\mu}{r_2^3}(x+a\mu-a) \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} - n^2 y = -\frac{GM(1-\mu)}{r_1^3}y - \frac{GM\mu}{r_2^3}y \\ \ddot{z} = -\frac{GM(1-\mu)}{r_1^3}z - \frac{GM\mu}{r_2^3}z \end{array} \right.$$
- On définit $\rho_1 = r_1/a$, $\rho_2 = r_2/a$ et $\alpha = \frac{1-\mu}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3}$, $\beta = \mu(1-\mu)\left(\frac{1}{\rho_2^3} - \frac{1}{\rho_1^3}\right)$
- On utilise $n^2 a^3 = GM$:

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} - 2n\dot{y} = n^2 x(1-\alpha) + an^2 \beta = -\frac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = n^2 y(1-\alpha) = -\frac{\partial U}{\partial y} \\ \ddot{z} = -n^2 \alpha z = -\frac{\partial U}{\partial z} \end{array} \right. \quad \text{avec} \quad \begin{aligned} U &= -n^2 a^2 \left(\frac{1-\mu}{\rho_1} + \frac{\mu}{\rho_2} \right) - \frac{1}{2} n^2 (x^2 + y^2) \\ &= -\frac{GM(1-\mu)}{r_1} - \frac{GM\mu}{r_2} - \frac{1}{2} n^2 (x^2 + y^2) \end{aligned}$$

Constante de Jacobi

$$\left\{ \begin{array}{l} \ddot{x} - 2n\dot{y} = -\frac{\partial U}{\partial x} \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = -\frac{\partial U}{\partial y} \\ \ddot{z} = -\frac{\partial U}{\partial z} \end{array} \right. \Rightarrow \begin{array}{l} \dot{x}\ddot{x} + \dot{y}\ddot{y} + \dot{z}\ddot{z} + \dot{x}\frac{\partial U}{\partial x} + \dot{y}\frac{\partial U}{\partial y} + \dot{z}\frac{\partial U}{\partial z} = 0 \\ \frac{d}{dt}\left(\frac{1}{2}(\dot{x}^2 + \dot{y}^2 + \dot{z}^2) + U(x, y, z)\right) = 0 \end{array}$$

- Donc $C = \frac{1}{2}v^2 + U = \text{cte}$. C 'est la **constante de Jacobi**, une intégrale première du mouvement \approx Energie dans le système d'axes tournants
- On doit avoir $v^2 \geq 0$. Comme $C = \text{cte}$, on doit toujours avoir $U \leq C$. Ceci permet de définir des régions de mouvement

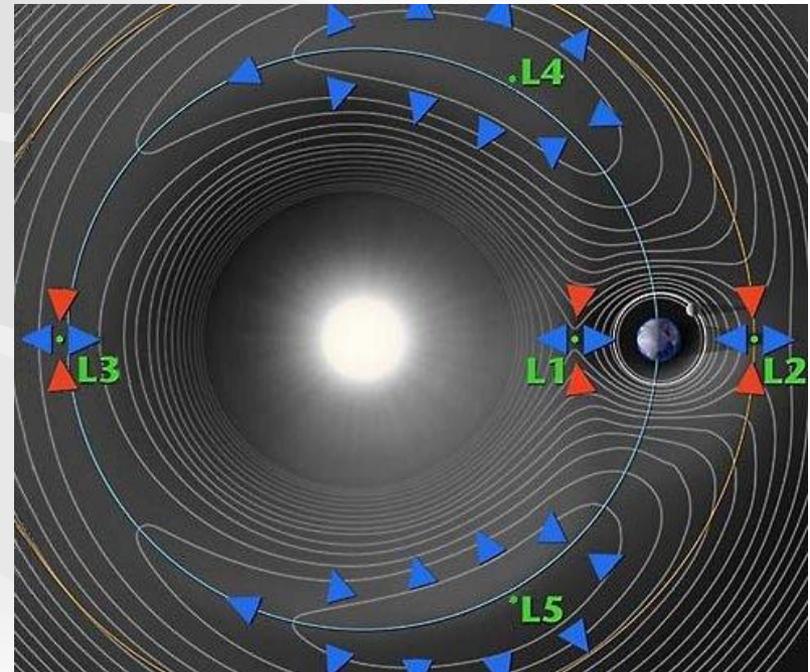


Les points de Lagrange L_1, L_2, L_3, L_4, L_5

- On cherche des points d'équilibre dans le repère tournant

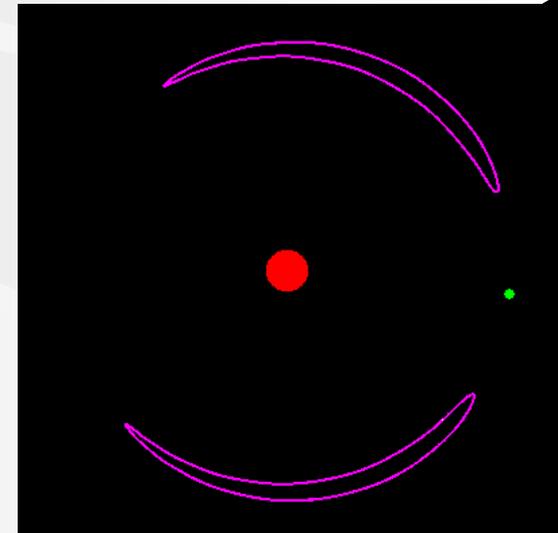
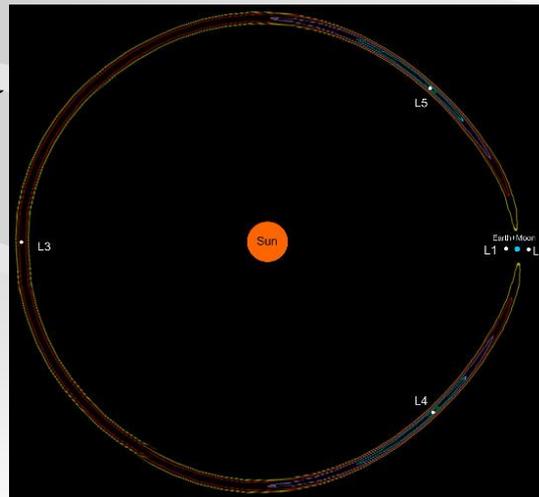
$$\begin{cases} \ddot{x} - 2n\dot{y} = n^2 x(1 - \alpha) + an^2 \beta \equiv 0 \\ \ddot{y} + 2n\dot{x} = n^2 y(1 - \alpha) \equiv 0 \\ \ddot{z} = -n^2 \alpha z \equiv 0 \end{cases} \quad \text{avec} \quad \alpha = \frac{1 - \mu}{\rho_1^3} + \frac{\mu}{\rho_2^3} \quad \beta = \mu(1 - \mu) \left(\frac{1}{\rho_2^3} - \frac{1}{\rho_1^3} \right)$$

- $\alpha \neq 0$, donc $z = 0$
 \Rightarrow Les points d'équilibre sont dans le plan $z = 0$;
- $y = 0$ ou $\alpha = 1$ pour annuler la deuxième équation.
 - $y = 0 \Rightarrow x(1 - \alpha) + a\beta = 0$.
Trois solutions en x : L_1, L_2, L_3 ;
 - $\alpha = 1 \Rightarrow \beta = 0 \Rightarrow \rho_1 = \rho_2 = 1$
 $\Rightarrow r_1 = r_2 = a$: L_4, L_5 : Triangle équilatéral avec les primaires



Les points de Lagrange

- On montre que L_1, L_2, L_3 sont toujours instables (points selles) et que L_4 et L_5 sont stables si
$$\mu < \frac{1}{2} - \frac{\sqrt{69}}{18} \approx 0.03852$$
 (La planète ne doit pas être trop massive)
- Dans ce cas, un corps placé au voisinage de L_4 ou L_5 y reste et effectue des **librations** au tour de ces points : orbite « tadpole » (têtard)
- L_4 ou L_5 sont pourtant des maxima du potentiel U , mais la stabilisation est assurée par la force de Coriolis
- Il existe des astéroïdes (troyens) dans cette situation vis-à-vis de Jupiter et quelques autres dans le système solaire.
- Si la libration est plus importante, on a affaire à une orbite « horseshoe » (fer à cheval)
- Des satellites ont été placés aux points L_1 et L_2 de la Terre. Ils sont entretenus.



Gravitation – Mécanique céleste

5. Le problème Képlérien perturbé
- Equations de Gauss et de Lagrange
 - Formulation Hamiltonienne
 - Variations séculaires : moyennes, développements

Le mouvement Képlérien perturbé

- Dans de nombreuses situations, les corps célestes ont un mouvement **proche d'un mouvement Képlérien**.
- Par exemple, les planètes du système solaire suivraient des orbites Képlériennes **pures** si elles ne subissaient **que l'attraction du Soleil**.
- En réalité, elles subissent en outre **l'attraction de toutes les autres planètes**. L'attraction solaire est **dominante** \Leftrightarrow on peut encore décrire les mouvements à l'aide d'orbites Képlériennes qui vont lentement se modifier
- Dans le cas général, un mouvement Képlérien perturbé obéira à une équation du type

$$\ddot{\vec{r}} = -\frac{\mu}{r^3} \vec{r} + \vec{P} \quad \text{avec} \quad \left| \vec{P} \right| \ll \frac{\mu}{r^2}$$

- On appelle **mouvement Képlérien osculateur** l'orbite Képlérienne que suivrait le corps si la perturbation disparaissait.

Equations de Gauss et de Lagrange

- On peut transformer les équations du mouvement pour en déduire des équations de variation des éléments orbitaux en fonction de \vec{P} . Ce sont les **équations de Gauss**.

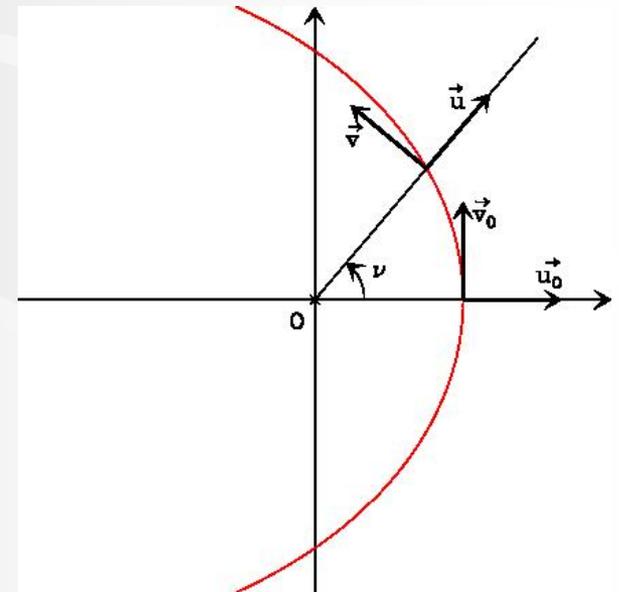
$$C \frac{da}{dt} = 2a^2 (\vec{P} \cdot \vec{v} + e \vec{P} \cdot \vec{v}_0)$$

$$C \frac{de}{dt} = r(e + \cos v)(\vec{P} \cdot \vec{v}) + a(1 - e^2)(\vec{P} \cdot \vec{v}_0)$$

$$C \frac{di}{dt} = r \cos(\omega + v)(\vec{P} \cdot \vec{k})$$

$$C \sin i \frac{d\Omega}{dt} = r \sin(\omega + v)(\vec{P} \cdot \vec{k})$$

$$Ce \left(\frac{d\omega}{dt} + \cos i \frac{d\Omega}{dt} \right) = r \sin v (\vec{P} \cdot \vec{v}) - a(1 - e^2)(\vec{P} \cdot \vec{u}_0)$$



Formulation Hamiltonienne

- Quand la perturbation dérive d'un potentiel (c'est souvent le cas), on préfère une approche Hamiltonienne

- On écrit $\vec{P} = -\vec{\nabla} U$
- On se place en éléments de Delaunay
- On écrit le Hamiltonien

$$\left(\begin{array}{l} q_1 = M \quad \leftrightarrow \quad p_1 = L = \sqrt{\mu a} \\ q_2 = \omega \quad \leftrightarrow \quad p_2 = G = L \sqrt{1 - e^2} \\ q_3 = \Omega \quad \leftrightarrow \quad p_3 = \Theta = G \cos i \end{array} \right)$$

$$H = H_{Kep} + U = -\frac{\mu^2}{2L^2} + U(M, \omega, \Omega, L, G, \Theta)$$

- On en déduit les équations canoniques du mouvement

$$\begin{array}{l} \frac{dM}{dt} = \frac{\mu^2}{L^3} + \frac{\partial U}{\partial L} \qquad \frac{dL}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial M} \\ \frac{d\omega}{dt} = \frac{\partial U}{\partial G} \qquad \frac{dG}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \omega} \\ \frac{d\Omega}{dt} = \frac{\partial U}{\partial \Theta} \qquad \frac{d\Theta}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial \Omega} \end{array}$$

Equations de Lagrange

- On peut transformer ces équations canoniques en **Equations de Lagrange**

$$\sqrt{\mu a} \frac{da}{dt} = -2a \frac{\partial U}{\partial M}$$

$$\sqrt{\mu ae} \frac{de}{dt} = -(1 - e^2) \frac{\partial U}{\partial M} + \sqrt{1 - e^2} \frac{\partial U}{\partial \omega}$$

$$C \sin i \frac{di}{dt} = -\cos i \frac{\partial U}{\partial \omega} + \frac{\partial U}{\partial \Omega}$$

$$C \sin i \frac{d\Omega}{dt} = -\frac{\partial U}{\partial i}$$

$$Ce \sin i \frac{d\omega}{dt} = -(1 - e^2) \sin i \frac{\partial U}{\partial e} + e \cos i \frac{\partial U}{\partial i}$$

$$\frac{dM}{dt} = \sqrt{\frac{\mu}{a^3}} + \frac{1}{\sqrt{\mu a}} \left(2a \frac{\partial U}{\partial a} + \frac{1 - e^2}{e} \frac{\partial U}{\partial e} \right)$$

- Ces équations sont équivalentes aux équations de Gauss, pour le cas où la perturbation dérive d'un potentiel...

Variations séculaires : moyennes, développements

- Souvent, les équations de perturbation ne sont pas solubles telles quelles. On est amené à faire des **approximations** : moyennes et développements.
- Généralement, on s'intéresse à **l'effet à long terme** de la perturbation. C'est justifié par le caractère perturbé du mouvement képlérien. Le temps caractéristique de la perturbation est \gg période orbitale.
- Or, la perturbation varie sur l'échelle de temps de l'orbite \Rightarrow on va la remplacer par sa **moyenne sur l'orbite**. On écrit une série de Fourier

$$\begin{aligned}
 U(M, \omega, \Omega, L, G, \Theta) &= U_0(\omega, \Omega, L, G, \Theta) \\
 &+ \sum_{k=1}^{+\infty} \left[U_{k,c}(\omega, \Omega, L, G, \Theta) \cos kM + U_{k,s}(\omega, \Omega, L, G, \Theta) \sin kM \right] \\
 U_0 &= \overline{U} = \frac{1}{P} \int_0^P U(t) dt = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} U(M) dM
 \end{aligned}$$

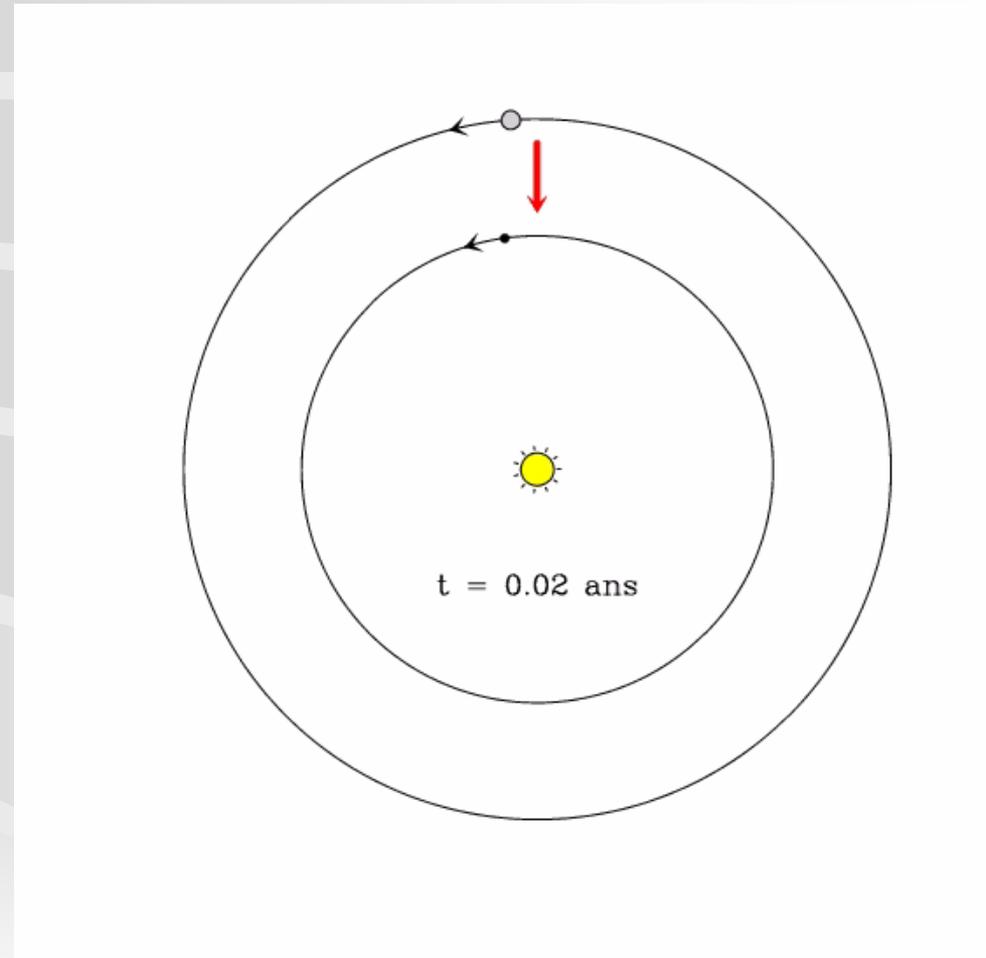
Variations séculaires : moyennes, développements

- La solution se développe en série aussi. Les termes variant rapidement ont une moyenne nulle et ne donnent lieu qu'à des fluctuations rapides. \Rightarrow Sur le long terme, seul le terme U_0 compte. On remplace U par sa **moyenne temporelle**. On ne retient que le terme séculaire.
- Conceptuellement, cela revient à faire une **transformation canonique** (méthode de Von Zeipel)
- De manière générale, s'il y a plusieurs **variables rapides indépendantes**, on moyenne sur ces variables. Par exemple, U dépend de la position de l'objet et de celle d'une planète perturbatrice.

$$U \quad \Rightarrow \quad \overline{U} = \frac{1}{(2\pi)^p} \int_0^{2\pi} \cdots \int_0^{2\pi} U(M_1, \dots, M_p) dM_1 \dots dM_p$$

Pourquoi moyenner une perturbation ?

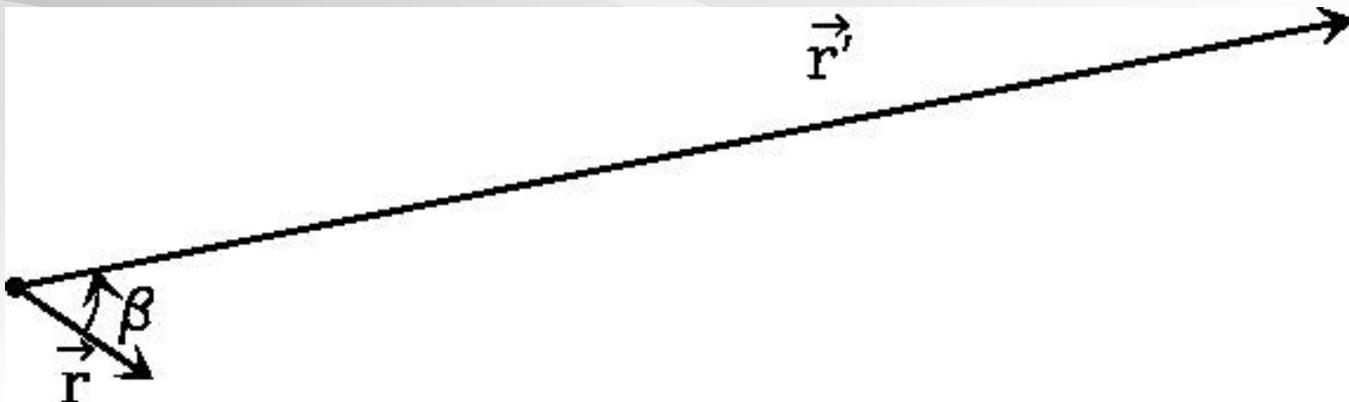
- La perturbation entre deux planètes est la plus forte lors de la conjonction (flèche rouge)
- Les conjonctions se répartissent uniformément sur l'orbite \Leftrightarrow la perturbation se moyenne.
- Mais les mouvements ne doivent pas être commensurables



Variations séculaires : développements

- L'étude analytique nécessite aussi souvent de faire des **développements limités** de la perturbation en plus de moyenner. Il y a deux types de développements :
 1. Développement en **polynômes de Legendre**, lorsque on a affaire à des orbites de tailles très différentes: r, r' , avec $r \ll r'$ (on écrit $x=r/r' \ll 1$)

$$\begin{aligned}
 U(\vec{r}, \vec{r}') &\propto \frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2\vec{r} \cdot \vec{r}'}} = \frac{1}{\sqrt{r^2 + r'^2 - 2rr' \cos \beta}} \\
 &= \frac{1}{r'} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 - 2x \cos \beta}} = \frac{1}{r'} \sum_{n=0}^{+\infty} P_n(\cos \beta) x^n
 \end{aligned}$$



Variations séculaires : développements

2. Développement en **coefficients de Laplace**, lorsque on a affaire à des orbites de tailles comparables, mais **d'excentricités et d'inclinaisons petites** (on développe en série de Fourier, puis en puissances des excentricités et inclinaisons)

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} = \frac{1}{r'} \frac{1}{\sqrt{1 + x^2 - 2x \cos \beta}} = \frac{1}{2r'} b_{1/2}^{(0)}(x) + \frac{1}{r'} \sum_{n=1}^{+\infty} b_{1/2}^{(n)}(x) \cos n\beta$$

$$\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|^p} = \frac{1}{2r'} b_{p/2}^{(0)}(x) + \frac{1}{r'} \sum_{n=1}^{+\infty} b_{p/2}^{(n)}(x) \cos n\beta$$

$$b_s^{(n)}(x) = \frac{2}{\pi} \int_0^\pi \frac{\cos n\theta}{(1 - 2x \cos \theta + x^2)^s} d\theta$$

Gravitation – Mécanique céleste

6. La résonance de Kozai et les théories planétaires

- Le problème restreint et la résonance de Kozai
- Les théories planétaires
- La théorie de Laplace-Lagrange
- Application : l'excentricité de l'orbite Terrestre

Application 1 : Problème restreint des 3 corps

Résonance de Kozai

- On considère un astéroïde (orbite interne) perturbé par une planète extérieure (r) sur orbite circulaire ($r'=a'$), de masse m . L'orbite du perturbateur est dans le plan XOY .
- On écrit la perturbation (termes directs et indirects), et non développe en polynômes de Legendre, en s'arrêtant à l'ordre 2.

$$U = -Gm \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r'^3} \right) = -\frac{Gm}{a'} \left(1 + \sum_{n=2}^{+\infty} P_n(\cos \beta) \left(\frac{r}{a'} \right)^n \right)$$

$$\approx -\frac{Gm}{a'} \left(1 + \left(\frac{r}{a'} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \beta - \frac{1}{2} \right) \right) = -\frac{Gm}{a'} \left(1 + \left(\frac{a}{a'} \right)^2 u_2 \right)$$

$$\text{avec } u_2 = \left(\frac{r}{a} \right)^2 \left(\frac{3}{2} \cos^2 \beta - \frac{1}{2} \right)$$

- On moyenne ensuite le u_2 sur les deux orbites

Problème restreint – Résonance de Kozai

$$\bar{u}_2 = \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u_2(M, M') dM dM' = \frac{(1-e^2)^{3/2}}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} \frac{u_2(\nu, \nu')}{(1+e \cos \nu)^2} d\nu d\nu'$$

$$= \frac{1}{4\pi^2} \int_0^{2\pi} \int_0^{2\pi} u_2(u, u') (1 - e \cos u) du du'$$

Hamiltonien de Kozai

$$= -\frac{1}{8} - \frac{9}{8}e^2 + \frac{3}{8}\cos^2 i - \frac{15}{8}e^2 \cos^2 i \cos^2 \omega + \frac{3}{2}e^2 \cos^2 i + \frac{15}{8}e^2 \cos^2 \omega$$

- On considère les éléments de Delaunay
- Le Hamiltonien a été moyenné, il ne dépend plus de $M \Rightarrow L = \text{cte} \Rightarrow a = \text{cte}$

$$\left(\begin{array}{l} q_1 = M \quad \leftrightarrow \quad p_1 = L = \sqrt{GM_* a} \\ q_2 = \omega \quad \leftrightarrow \quad p_2 = K = L \sqrt{1 - e^2} \\ q_3 = \Omega \quad \leftrightarrow \quad p_3 = \Theta = K \cos i \end{array} \right)$$

- Il ne dépend pas de $\Omega \Rightarrow \Theta = \text{cte} !$ Donc

$$h = \sqrt{1 - e^2} \cos i = \text{cte}$$

- On a aussi $\bar{H} = \text{cte}$, donc $\bar{u}_2 = \text{cte}$. Or pour une valeur de h donnée, \bar{u}_2 n'est plus fonction que de e et ω . On peut tracer des lignes de niveau dans un plan (ω, e) (Hamiltonien à un degré de liberté)

Problème restreint – Résonance de Kozai

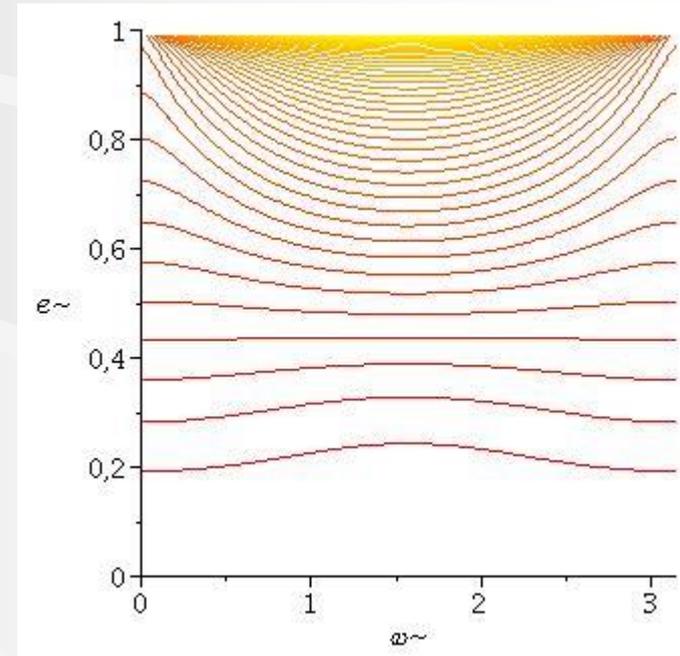
- On considère trois situations:

- $i=0$ initialement. Par les équations de Lagrange, on trouve $di/dt=0$.
Donc $i=0$ tout le temps. Le mouvement est dans le plan (logique).
Comme $h = cte$, on a $e = cte$. On trouve aussi

$$\frac{d\varpi}{dt} = \frac{d\Omega}{dt} + \frac{d\omega}{dt} = \frac{3}{4} \frac{ma^{3/2} \sqrt{G(1-e^2)}}{a'^3 \sqrt{M_*}} = \frac{3}{4} n \left(\frac{a}{a'} \right)^3 \frac{m}{M} \sqrt{1-e^2} \ll n$$

L'orbite **précesse lentement** à vitesse constante dans son plan.

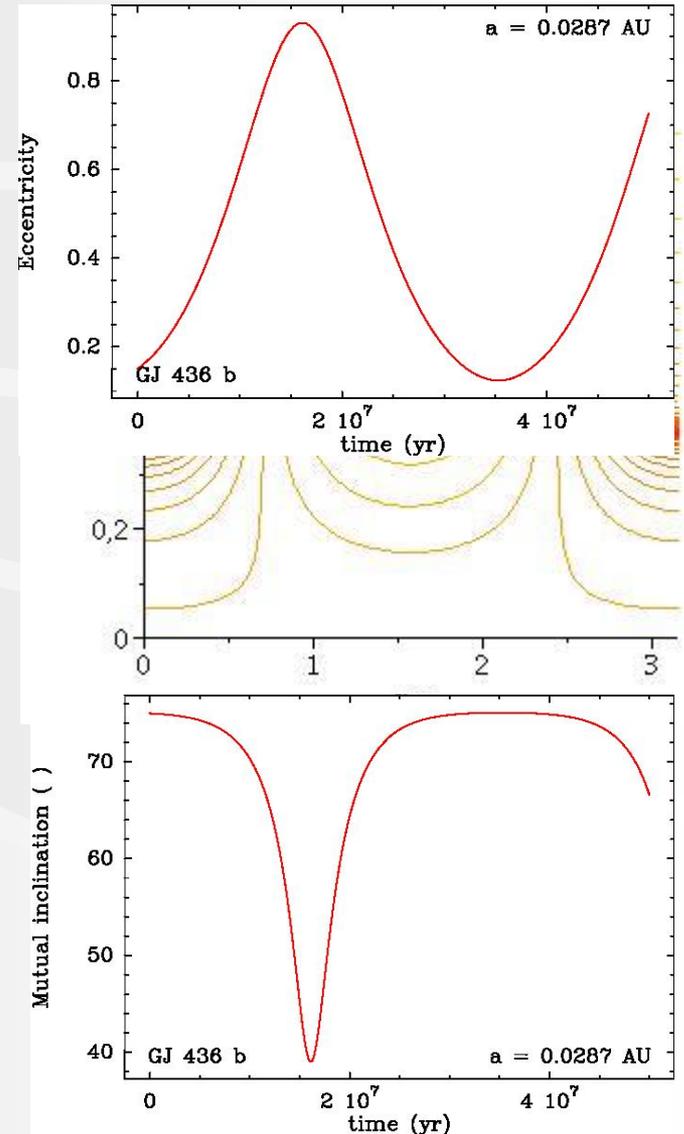
- $h \simeq 1 \Leftrightarrow e$ petit et i petit. On trace des lignes $\bar{u}_2 = cte$ dans un plan (ω, e)
L'excentricité reste faible tout le temps et l'orbite précesse comme dans le cas $i=0$.



Problème restreint – Résonance de Kozai

3. $h \ll 1$. Donc i est grand au départ. On trace des lignes de niveau $u_2 = \text{cte}$ dans un plan (ω, e) . La situation est très différente. L'excentricité peut monter jusqu'à ~ 1 périodiquement. Comme $h = \text{cte}$, dans le même temps i décroît. C'est la **résonance de Kozai**. Confirmé par l'étude numérique.

C'est un phénomène important pour l'évolution de certaines comètes (génération de sun-grazers) et dans l'évolution dynamique de certains systèmes stellaires multiples



Théories planétaires

- Une théorie planétaire est un modèle du **mouvement des planètes dans un système planétaire** (solaire ou non) autour d'une étoile.
- C'est un cas particulier du **problème à N corps** où un des corps (le « Soleil », numéroté 0, a une masse nettement plus grande que tous les autres. Les autres seront les « planètes »).
- On va supposer que toutes les planètes suivent **des orbites Képlériennes perturbées** autour du Soleil. On raisonne en variables héliocentriques \vec{r}_k = rayon vecteur Soleil – Planète k
- Equations du mouvement des planètes

$$\frac{d^2 \vec{r}_k}{dt^2} = - \frac{G (m_0 + m_k)}{r_k^3} \vec{r}_k - \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \nabla U_{k,i} \quad , \quad U_{k,i} = -Gm_i \left(\frac{1}{|\vec{r}_k - \vec{r}_i|} - \frac{\vec{r}_k \cdot \vec{r}_i}{r_i^3} \right)$$

- Point de départ : On développe les $U_{k,i}$ en coefficients de Laplace
- **Il n'y a pas de théorie exacte**, mais plusieurs types de théories (à variations séculaires, générales...) de précision et complexité variables.

Théorie de Laplace-Lagrange

- C'est la théorie linéaire la plus simple.
- **Principe** : On **développe** les $U_{k,i}$ en puissances des excentricités et inclinaisons en s'arrêtant à l'ordre 2, et on **moyenne** le résultat sur tous les mouvements orbitaux \Rightarrow Les demi-grands axes a_k sont constants.
- On raisonne en **éléments de Poincaré, pour chaque planète k**

$$\left(\begin{array}{l} q_{1,k} = \lambda_k = \omega_k + \Omega_k + M_k \quad \leftrightarrow \quad p_{1,k} = L_k = \sqrt{G(M_* + m_k)a_k} \\ q_{2,k} = -\sqrt{2L_k(1-\sqrt{1-e_k^2})} \sin(\Omega_k + \omega_k) \quad \leftrightarrow \quad p_{2,k} = \sqrt{2L_k(1-\sqrt{1-e_k^2})} \cos(\Omega_k + \omega_k) \\ q_{3,k} = -\sqrt{2L_k\sqrt{1-e_k^2}(1-\cos i_k)} \sin \Omega_k \quad \leftrightarrow \quad p_{3,k} = \sqrt{2L_k\sqrt{1-e_k^2}(1-\cos i_k)} \cos \Omega_k \end{array} \right)$$

$$\overline{U}_k = \sum_{\substack{i=1 \\ i \neq k}}^n \overline{U}_{k,i} \quad \frac{dq_{j,k}}{dt} = \frac{\partial \overline{U}_k}{\partial p_{j,k}} \quad \frac{dp_{j,k}}{dt} = -\frac{\partial \overline{U}_k}{\partial q_{j,k}}$$

Théorie de Laplace-Lagrange

- Résultat :

1. Pour $i < k$:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{k,i} = & \frac{Gm_i}{2a_k} b_{1/2}^{(0)} \left(\frac{a_i}{a_k} \right) + \frac{1}{4} \frac{Gm_i a_i}{a_k^2 \sqrt{G(M_* + m_k) a_k}} \left[-b_{3/2}^{(2)} \left(\frac{a_i}{a_k} \right) \times (q_{2,k} q_{2,i} + p_{2,k} p_{2,i}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} b_{3/2}^{(1)} \left(\frac{a_i}{a_k} \right) \times (q_{2,k}^2 + p_{2,k}^2 + q_{2,i}^2 + p_{2,i}^2 - (q_{3,k} - q_{3,i})^2 - (p_{3,k} - p_{3,i})^2) \right] \end{aligned}$$

2. Pour $i > k$:

$$\begin{aligned} \bar{U}_{k,i} = & \frac{Gm_i}{2a_i} b_{1/2}^{(0)} \left(\frac{a_k}{a_i} \right) + \frac{1}{4} \frac{Gm_i a_k}{a_i^2 \sqrt{G(M_* + m_k) a_k}} \left[-b_{3/2}^{(2)} \left(\frac{a_k}{a_i} \right) \times (q_{2,k} q_{2,i} + p_{2,k} p_{2,i}) \right. \\ & \left. + \frac{1}{2} b_{3/2}^{(1)} \left(\frac{a_k}{a_i} \right) \times (q_{2,k}^2 + p_{2,k}^2 + q_{2,i}^2 + p_{2,i}^2 - (q_{3,k} - q_{3,i})^2 - (p_{3,k} - p_{3,i})^2) \right] \end{aligned}$$

$$Q_2 = \begin{pmatrix} q_{2,1} \\ \vdots \\ q_{2,n} \end{pmatrix} \quad Q_3 = \begin{pmatrix} q_{3,1} \\ \vdots \\ q_{3,n} \end{pmatrix} \quad P_2 = \begin{pmatrix} p_{2,1} \\ \vdots \\ p_{2,n} \end{pmatrix} \quad P_3 = \begin{pmatrix} p_{3,1} \\ \vdots \\ p_{3,n} \end{pmatrix}$$

Théorie de Laplace-Lagrange

- Equations du mouvement :

$$\frac{dQ_2}{dt} = -EP_2 \quad \frac{dP_2}{dt} = EQ_2$$

$$\frac{dQ_3}{dt} = -JP_3 \quad \frac{dP_3}{dt} = JQ_3$$

où E et J sont des matrices $n \times n$.

- Résolution :

$$\frac{d^2 Q_2}{dt^2} = -E^2 Q_2 \quad \frac{d^2 Q_3}{dt^2} = -J^2 Q_3$$

On **diagonalise** E^2 et J^2 . Chaque composante a une solution sinusoidale. En repassant dans la base initiale, la solution est une **combinaison linéaire de solutions sinusoidales**

$$q_{2,k}(t) = -\sum_{i=1}^n \lambda_{k,i} A_i \sin(g_i t + \beta_i) \quad p_{2,k}(t) = \sum_{i=1}^n \lambda_{k,i} A_i \cos(g_i t + \beta_i)$$

$$q_{3,k}(t) = -\sum_{i=1}^n \mu_{k,i} B_i \sin(s_i t + \delta_i) \quad p_{3,k}(t) = \sum_{i=1}^n \mu_{k,i} B_i \cos(s_i t + \delta_i)$$

Théorie de Laplace-Lagrange

- A et B sont les vecteurs propres, les $\lambda, \mu, \beta, \delta$ sont des constantes d'intégration.
- Les g_i 's et les s_i 's sont les valeurs propres des matrices E et J . Elles ont la dimension d'une fréquence. Ce sont les fréquences fondamentales de précession des orbites du systèmes planétaire.
- Les g_i 's sont tous positifs, et les s_i 's sont tous négatifs, sauf un qui est nul (invariance par rotation).
- Dans le système solaire :

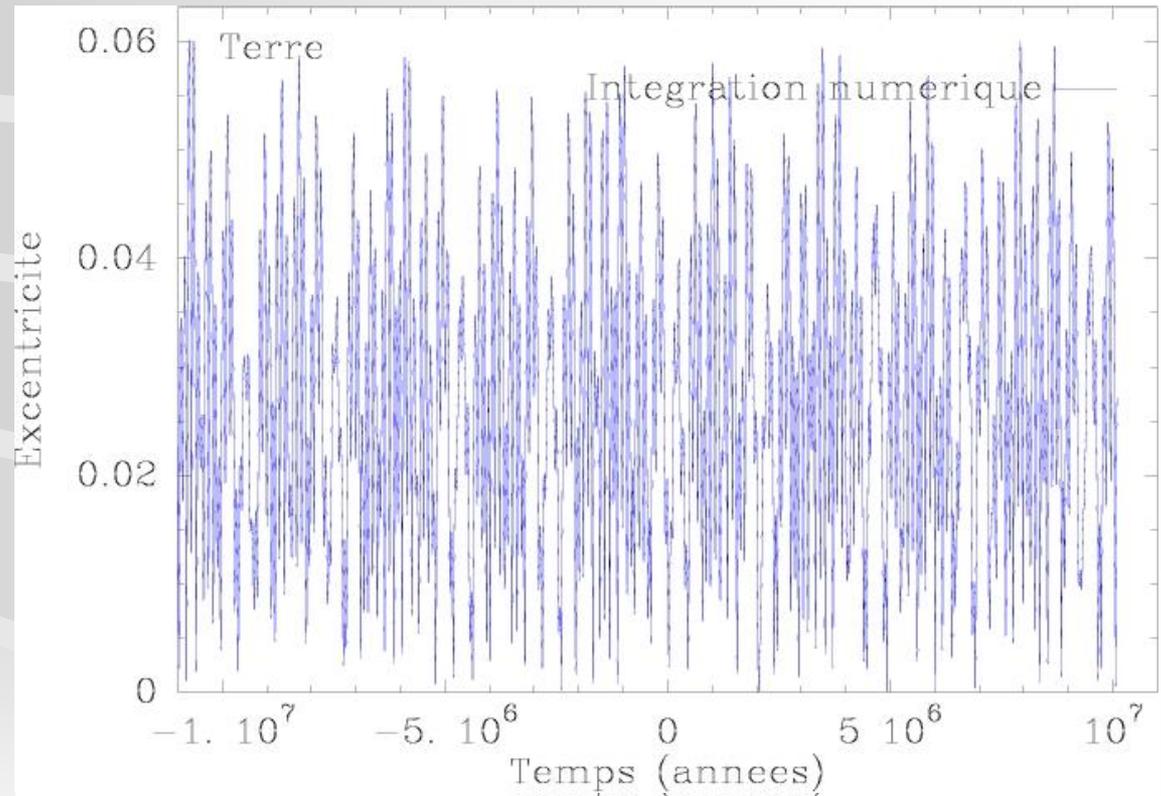
Indice i	g_i ("/an)	Période (ans)	s_i ("/an)	Période(ans)
1	5.85909	221195	-5.200748	249195
2	7.459556	173737	-6.570095	197257
3	17.398552	74489	-18.74556	69136
4	18.052003	71793	-17.63585	73487
5	3.711292	349205	0	--
6	22.284414	58157	-25.73827	50353
7	2.701372	479756	-2.903761	446318
8	0.633134	2046960	-0.823444	1913226

Théories planétaires : résultats

- Sauf cas particuliers (résonances), les **demi-grands axes sont constants**, les **excentricités** et les **inclinaisons fluctuent légèrement** et les **orbites précessent lentement** dans leur plan.
- Ces résultats restent vrais si on va chercher des théories planétaires plus sophistiquées (les valeurs des fréquences fondamentales sont légèrement modifiées).
- Mais dans ce cas, la solution n'est plus une simple combinaison linéaire de sinusoides \Rightarrow non linéarités, chaos

Exemple : évolution de l'excentricité de l'orbite terrestre

- L'excentricité de la Terre **fluctue entre 0 et 0.06**
- Ceci a un impact sur le **climat** terrestre
- **Imprévisible** sur une échelle de ~1 milliard d'années
⇒ **Chaos !**



Gravitation – Mécanique céleste

7. Les résonances

- Les différents types de résonances
- Les résonances de moyen mouvement
- Diagrammes de phase
- Situations plus complexes

Résonances

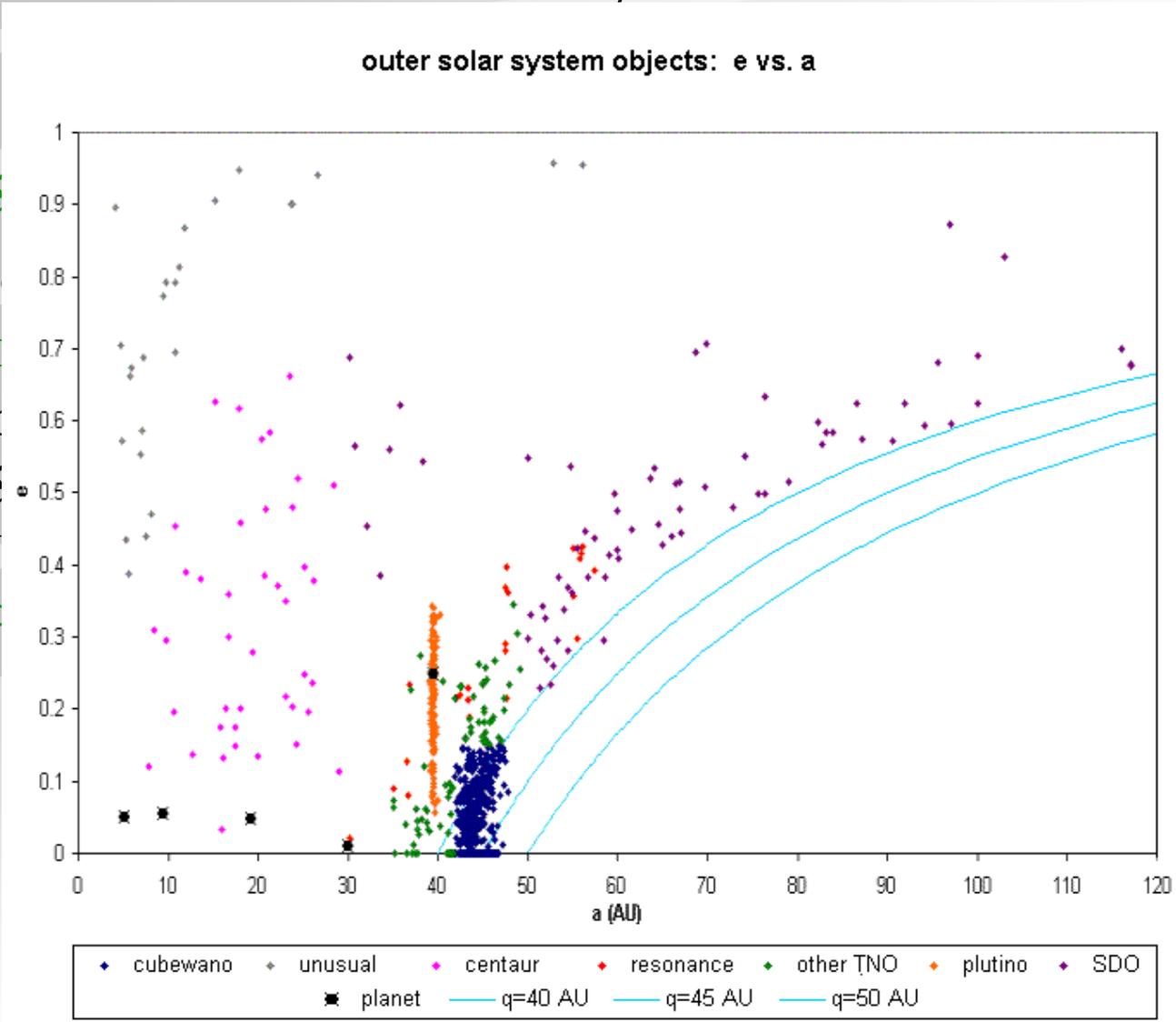
- De manière générale, on parle de résonance dans un système dynamique lorsqu'un **angle caractéristique cesse de précesser** et se met à osciller autour d'une position d'équilibre.
- En mécanique céleste, on distingue **4 types** de résonances
 1. **La résonance de Kozai** : arrêt de la précession de l'argument du périastre ω .
 2. **Les résonances de moyen mouvement** : important et fréquent
 3. **Les résonances séculaires** : plus compliqué
 4. **Les résonances spin-orbite** : liées aux effets de marée

Les résonances de moyen mouvement

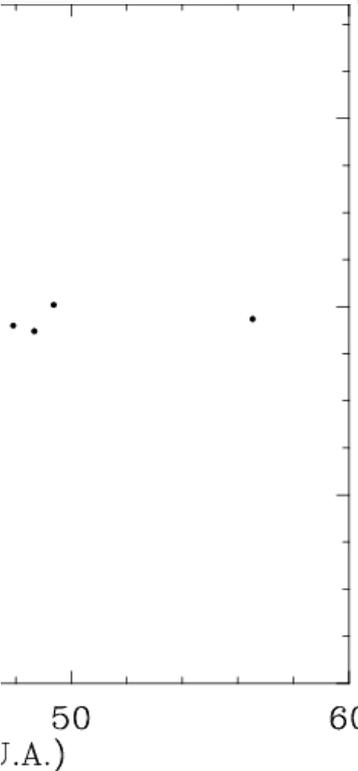
- Une résonance de moyen mouvement correspond à une **commensurabilité** (=un rapport rationnel simple) entre les **moyens mouvements** (=les périodes orbitales) de deux corps dans un système planétaire
- C'est assez fréquent dans le Système Solaire et ailleurs:
 - **Planètes**
 - 5 périodes de Jupiter = 2.013 périodes de Saturne
 - 3 périodes de Neptune = 1.99 périodes de Pluton
 - **Satellites de Jupiter**
 - 2 périodes de Io = 1 période d'Europe
 - 2 périodes d'Europe = 1 période de Ganymède
 - **Satellites de Saturne**
 - 2 périodes de Mimas = 1 période de Téthys
 - 2 périodes d'Encelade = 1 période de Dioné
 - 4 périodes de Titan = 3 périodes d'Hypérion
 - **Systèmes extrasolaires**
 - Gliese 876, etc...

Résonances de moyen mouvement (II)

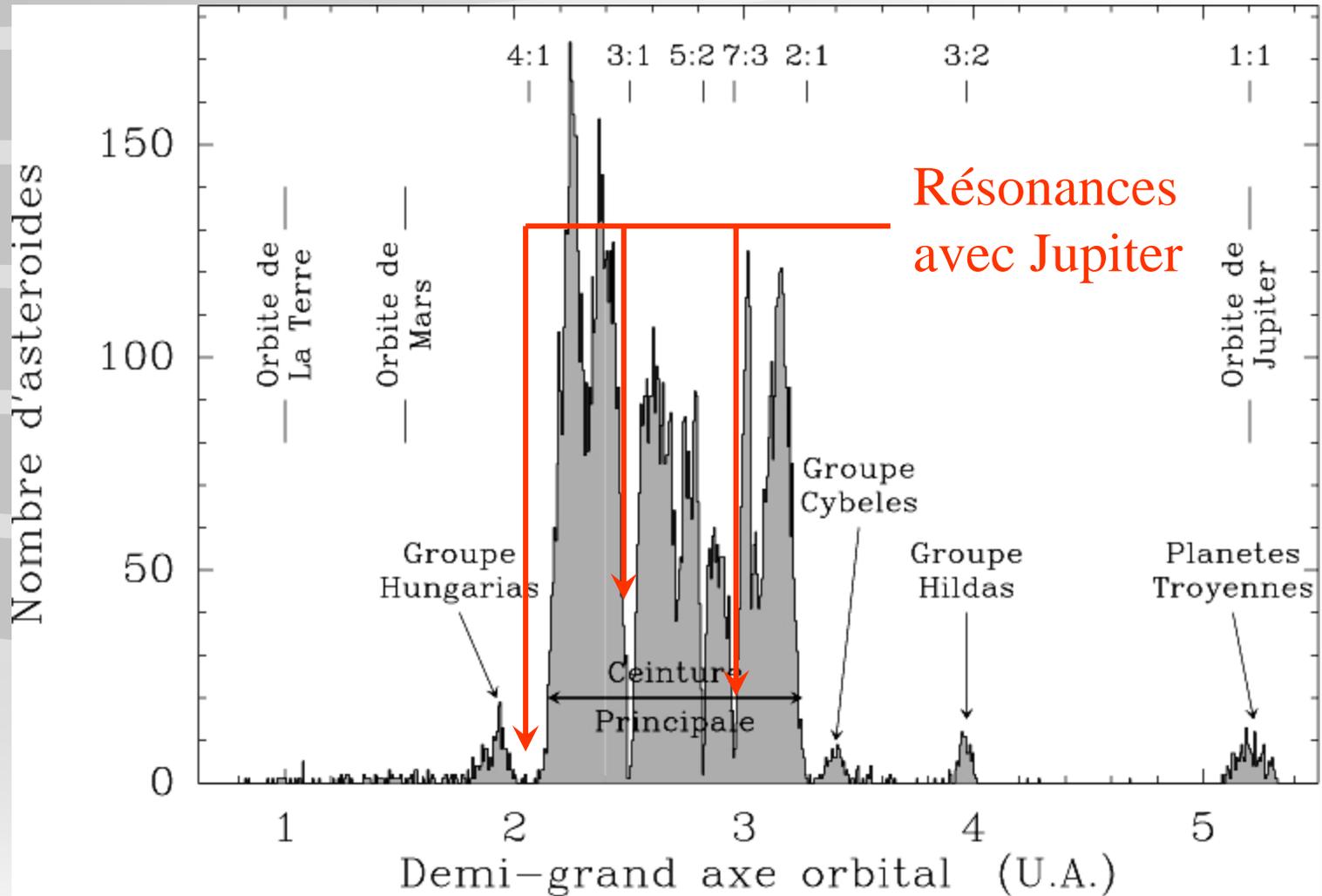
- C
- ré
- C
- cc
- ob
- ré
- N
- (F



de



Résonances de moyen mouvement (III)

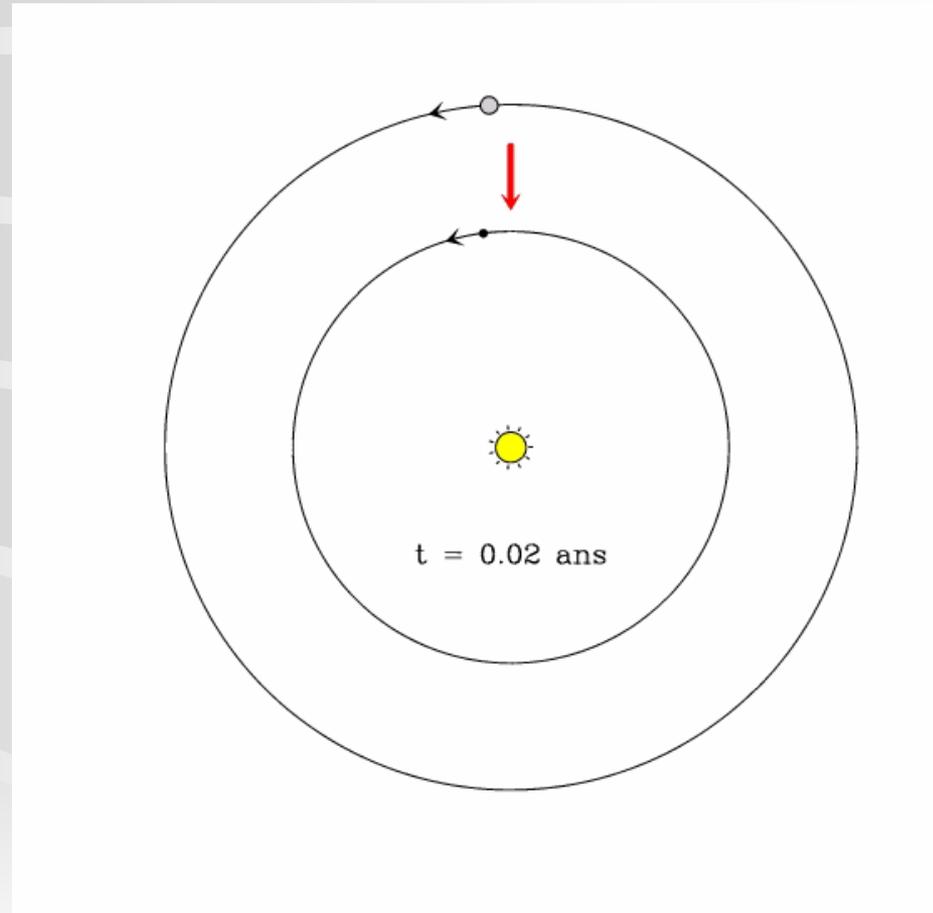


Une coupe de la ceinture d'astéroïdes : Lacunes de Kirkwood

Que se passe-t-il dans une résonance ?

Deux planètes en résonance 2:1.

- Les **conjonctions** ont toujours lieu au même endroit \Rightarrow la **perturbation s'additionne toujours dans le même sens.**
- On s'attend à des effets plus importants...



Résonances de moyen mouvement : théorie

- On considère un petit corps en orbite autour d'une étoile, en résonance $(p+q) : p$ avec une planète, **coplanaire**.

- On écrit le Hamiltonien

$$H = -\frac{GM_*}{2a} - Gm' \left(\frac{1}{|\vec{r} - \vec{r}'|} - \frac{\vec{r} \cdot \vec{r}'}{r'^3} \right)$$

- On part des éléments de **Delaunay plans**

($\lambda =$ longitude moyenne, $\varpi =$ longitude du périastre)

$$\left(\begin{array}{l} q_1 = \lambda = \Omega + \omega + M \quad \leftrightarrow \quad p_1 = L = \sqrt{aGM_*} \\ q_2 = \varpi = \omega + \Omega \quad \leftrightarrow \quad p_2 = P = L \left(\sqrt{1 - e^2} - 1 \right) \end{array} \right)$$

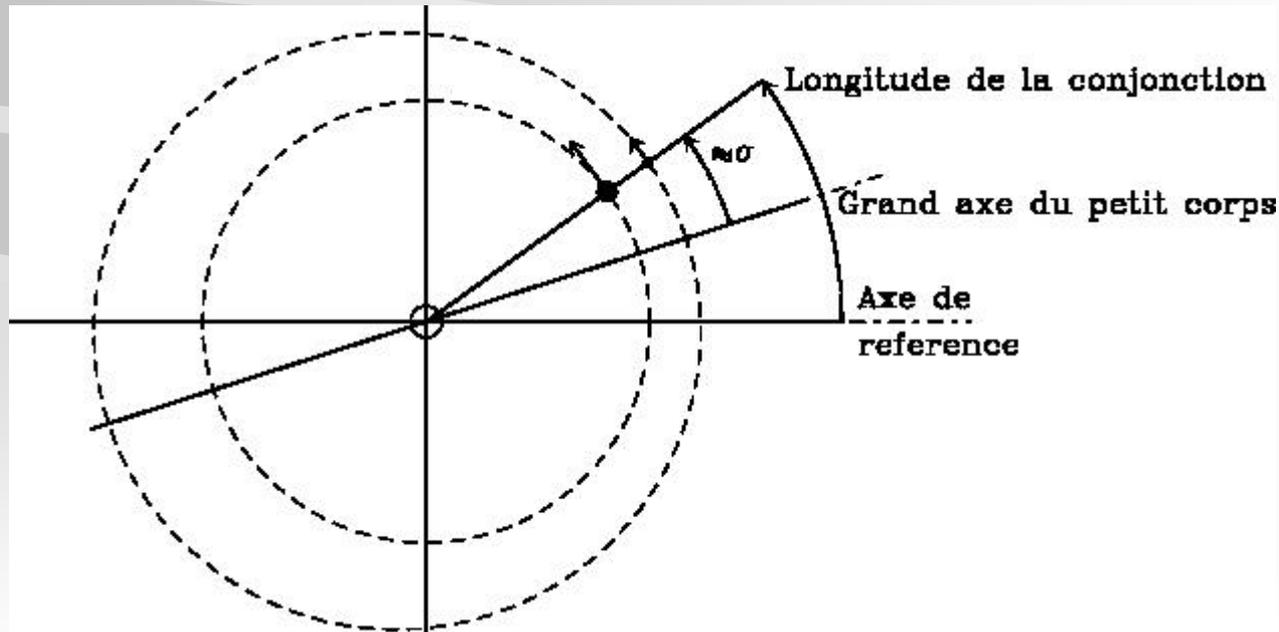
- $|q|$ est l'ordre de la résonance
- **Idée fondamentale** : **On ne peut pas moyenner** le Hamiltonien séparément sur les deux orbites car **M** et **M'** (λ et λ') **ne sont pas indépendants** à cause de la résonance
- Il faut procéder différemment : on va faire une transformation canonique avant de moyenner.

Résonances de moyen mouvement : théorie

- On introduit l'angle caractéristique de la résonance σ :

$$\sigma = \frac{p + q}{q} \lambda' - \frac{p}{q} \lambda - \varpi$$

- σ est une *variable lente* du fait même de la résonance : $\frac{d\lambda}{dt} \approx \frac{p + q}{p} \frac{d\lambda'}{dt}$
- σ représente approximativement la **longitude de la conjonction** par rapport à la direction du périastre du petit corps
- $|q|$ représente le **nombre de positions de conjonction**.



Résonances de moyen mouvement : théorie

- De manière symétrique, on introduit l'équivalent pour la planète.
$$v = -\frac{p+q}{q}\lambda' + \frac{p}{q}\lambda + \varpi'$$

- On considère une transformation canonique linéaire

$$\left(\begin{array}{l} \lambda \leftrightarrow L \\ \varpi \leftrightarrow P \end{array} \right) \Rightarrow \left(\begin{array}{l} \sigma \leftrightarrow S \\ v \leftrightarrow N \end{array} \right)$$

- On applique les règles ($P' = A^{-1}P$) pour trouver S et N . Le nouveau jeu de variables conjuguées est

$$\left(\begin{array}{l} q'_1 = \sigma = \frac{p+q}{q}\lambda - \frac{p}{q}\lambda - \varpi \leftrightarrow p'_1 = S = L(\sqrt{1-e^2} - 1) = P \\ q'_2 = v = -\frac{p+q}{q}\lambda + \frac{p}{q}\lambda - \varpi' \leftrightarrow p'_2 = N = L\left(\sqrt{1-e^2} - \frac{p+q}{p}\right) \end{array} \right)$$

- La transformation dépend du temps (par λ'). Le Hamiltonien est changé

$$H' = H - \frac{p+q}{p}n'L$$

Résonances de moyen mouvement : théorie

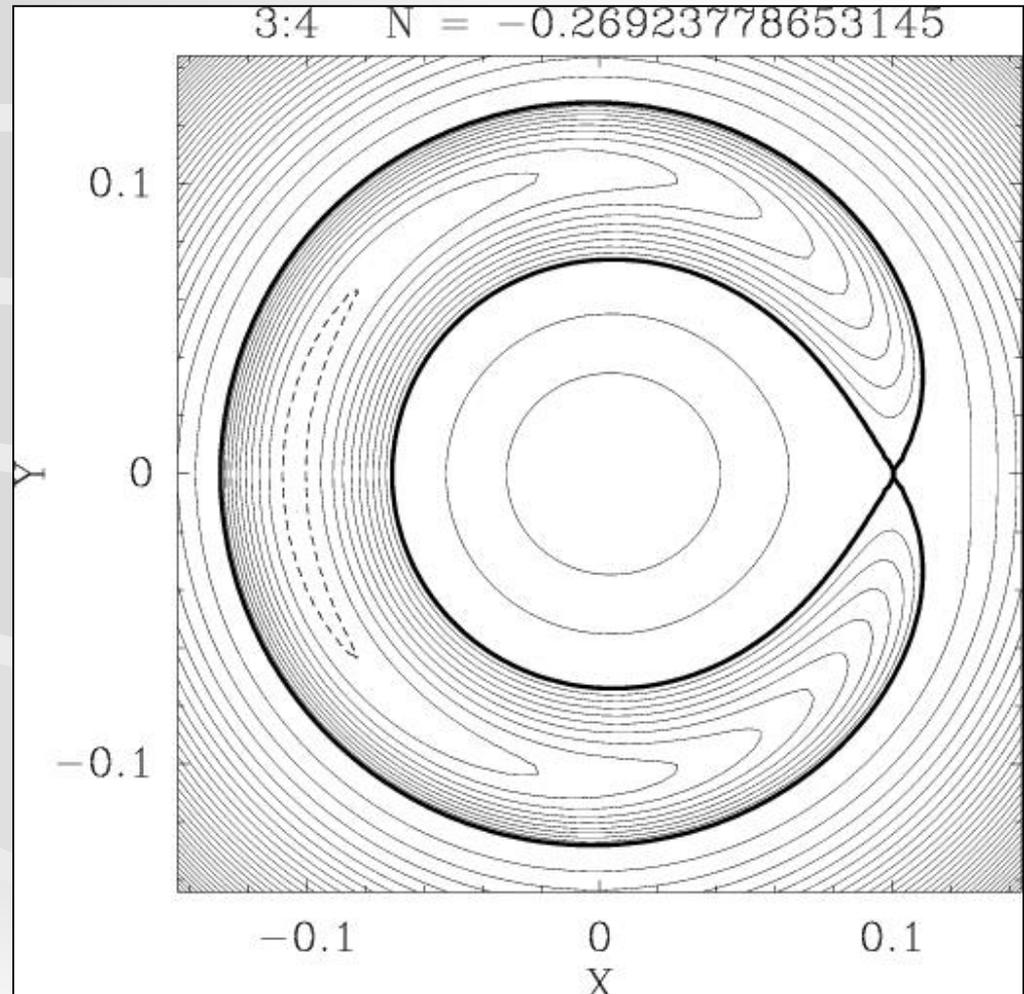
- Ensuite on **moyenne** le Hamiltonien sur la dernière **variable rapide** qui reste, λ' (position de la planète):

$$H' \rightarrow \overline{H'} = \frac{1}{2\pi} \int_0^{2\pi} H'(\lambda') d\lambda'$$

- Ceci rend le Hamiltonien conservatif, donc constant.
- **Cas particulier** : planète circulaire ($e'=0$)
 - $\Rightarrow \varpi'$ n'est pas défini
 - $\Rightarrow \overline{H'}$ est indépendant de ν
 - $\Rightarrow N = \text{constante !}$
- Le Hamiltonien n'a plus **qu'un degré** de liberté (σ, S): Pour une valeur de N donnée, on peut tracer un diagramme de phase dans un plan ($X = \sqrt{2S} \cos \sigma$, $Y = \sqrt{2S} \sin \sigma$), ou encore ($X = e \cos \sigma$, $Y = e \sin \sigma$)

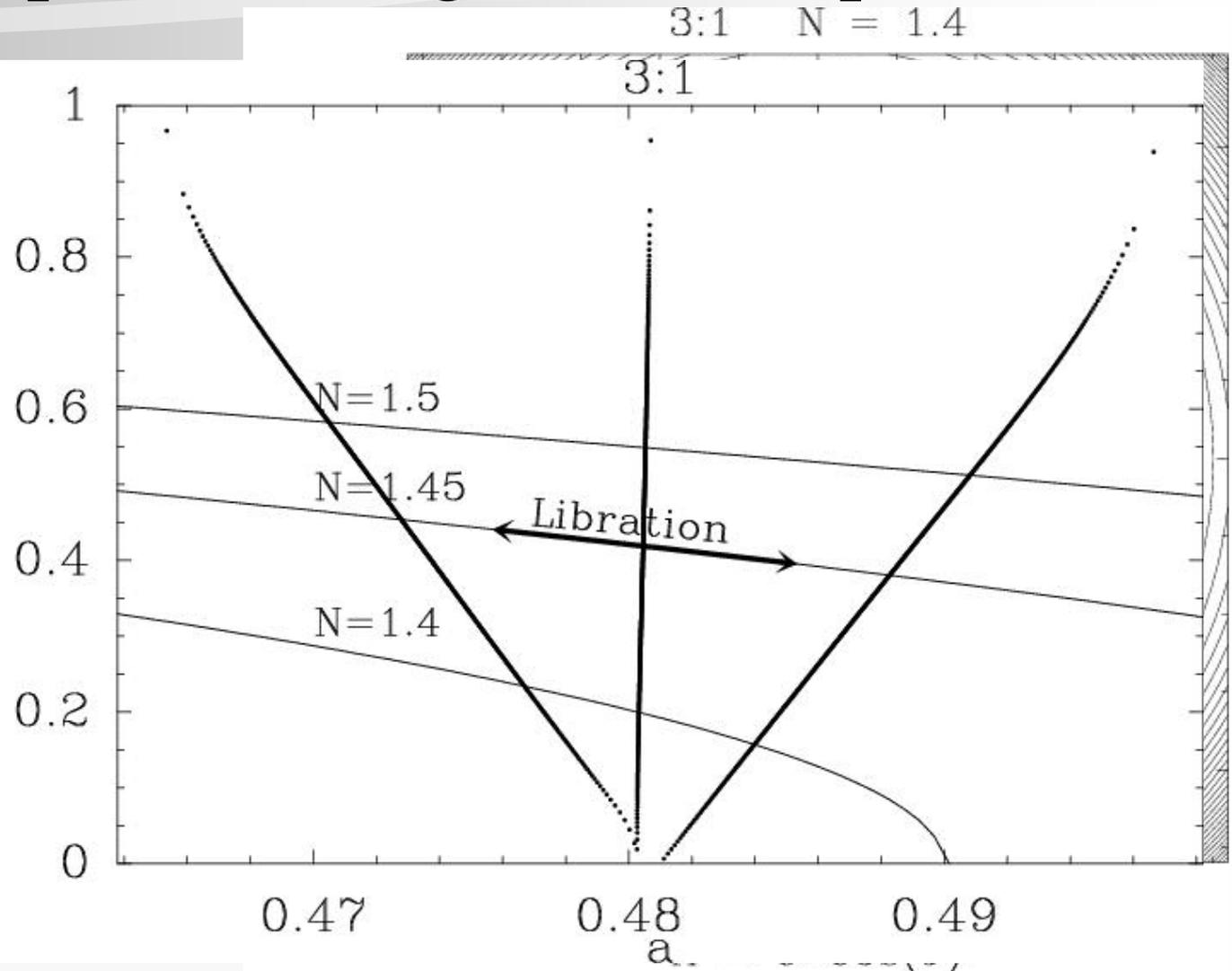
Exemple 1 de diagramme de phase

- Résonance 3:4 , d'ordre 1 (Titan-Hypérion) ; diagramme de phase pour une valeur de N donnée.
- Deux types d'orbites :
 - Orbites avec circulation de σ : orbites non-résonantes !
 - Orbites avec libration de σ autour d'une position d'équilibre : orbites résonantes !
- La position d'équilibre représente la position de conjonction la plus stable. La conjonction oscille autour de cette position \Rightarrow La résonance s'autoentretient !



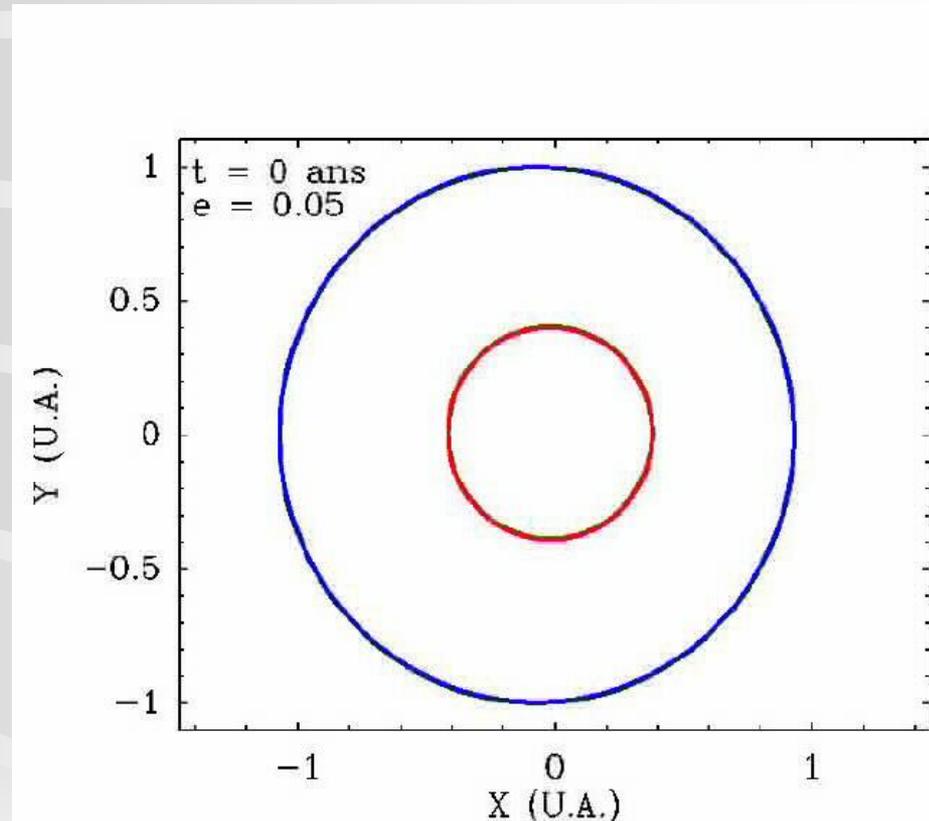
Exemple 2 de diagramme de phase

- Résonance
- Deux positions d'équilibre correspondent à $\sigma = \pm 90^\circ$
- La libration s'accompagne d'oscillations
- Pour chaque valeur de a , il existe une orbite maximale dans le diagramme



Résonances de moyen mouvement : situations plus compliquées

- Si le problème n'est pas plan :
 - Inclinaison faible : ça ne change pas grand-chose
 - Inclinaison forte : interférence avec Kozai : Chaos !
- Si la planète est excentrique avec e' pas trop grand, on a le même mouvement de libration.
- Mais N peut changer, parfois beaucoup sur un temps plus long !
- L'excentricité peut devenir grande \Rightarrow déstabilisation (Lacunes de Kirkwood)



Gravitation – Mécanique céleste

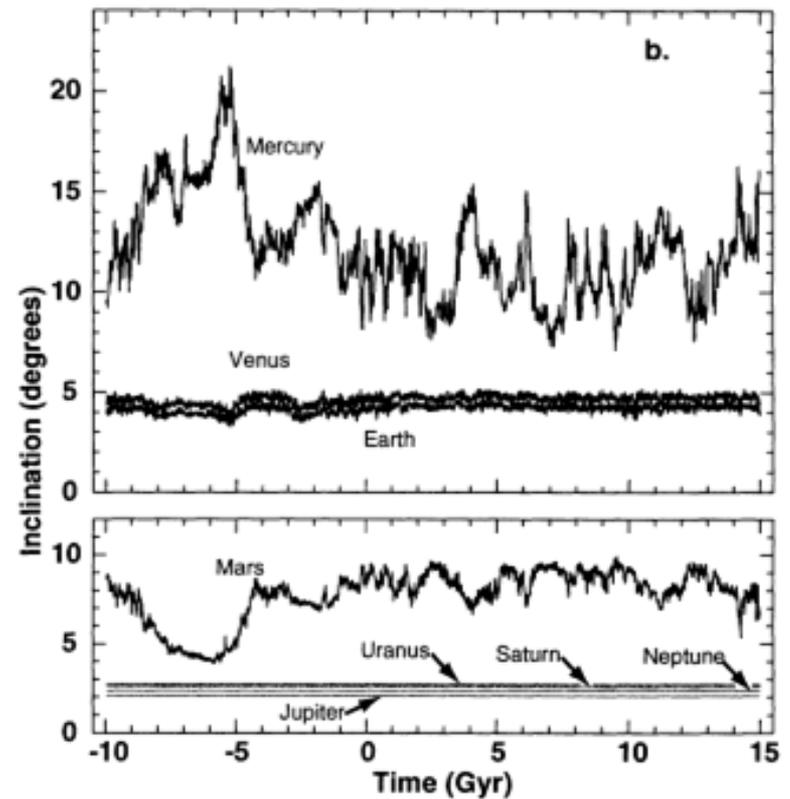
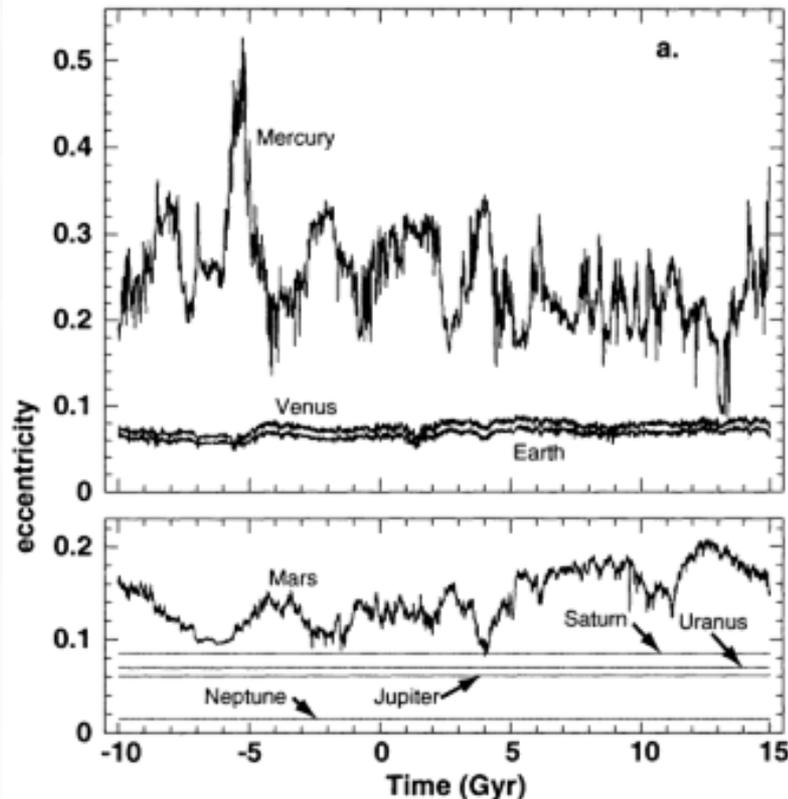
8. Le chaos

- Le chaos dans les théories planétaires
- Les exposants de Lyapunov
- Les sections de Poincaré
- L'analyse en fréquences

Le chaos

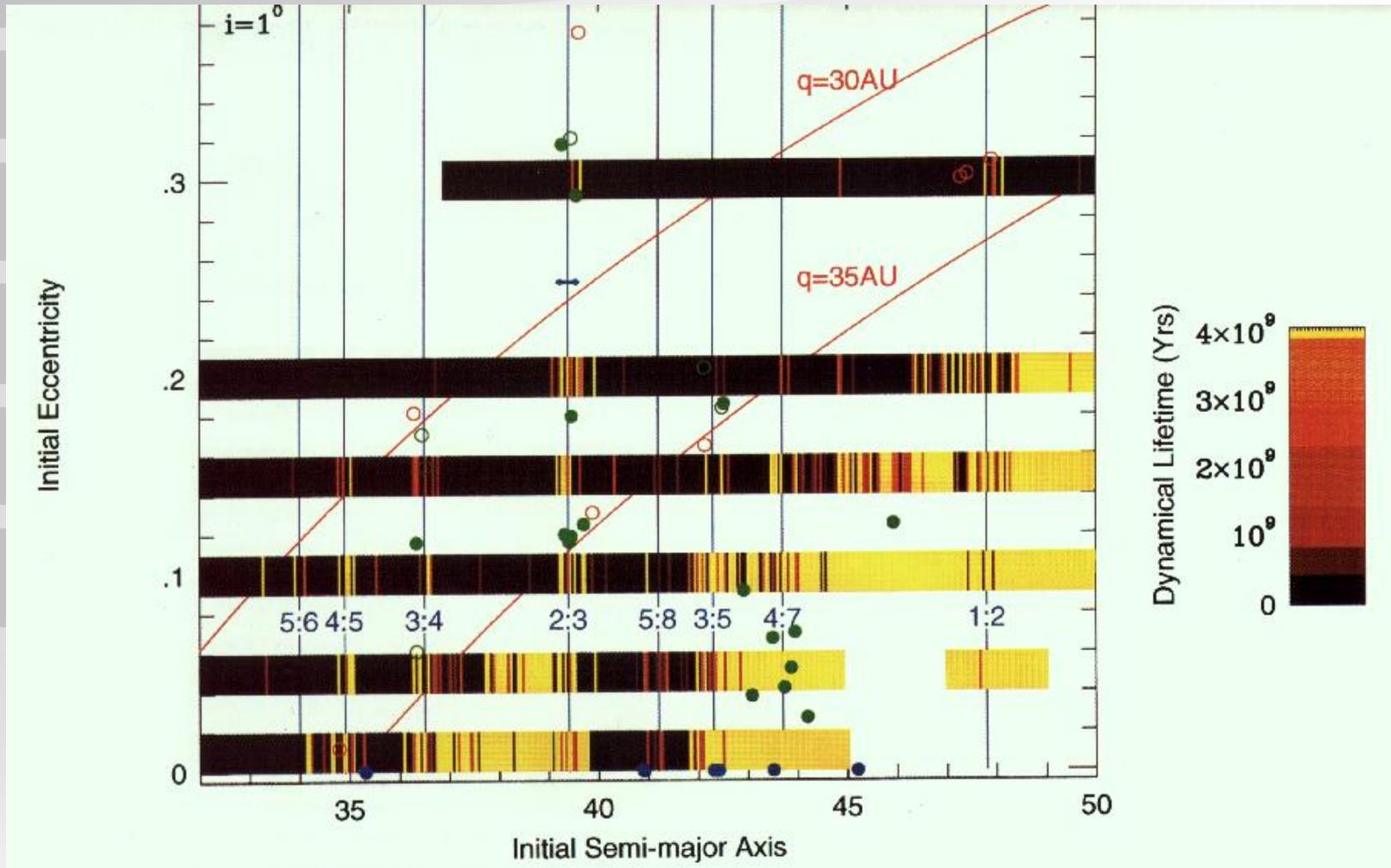
- Chaos dans un système dynamique = imprédictibilité = hypersensibilité aux conditions initiales
- Dans les théories planétaires, l'introduction de termes non-linéaires conduit à de l'imprédictibilité
- Conséquence : sur le long terme (plusieurs milliards d'années, la description (même sur ordinateur) de l'évolution dynamique est essentiellement statistique.
- Certaines situations locales sont plus chaotiques :
 - Rencontres proches
 - Recouvrement de résonances
- **Attention : Chaos \neq Instabilité !** Un système dynamique peut être stable tout en étant chaotique
- Outil de mesure du chaos : exposants de Lyapunov

Chaos dans les théories planétaires



on ne peut pas l'affirmer définitivement.

Zoom sur la ceinture de Kuiper



La superposition des résonances déstabilise certaines orbites

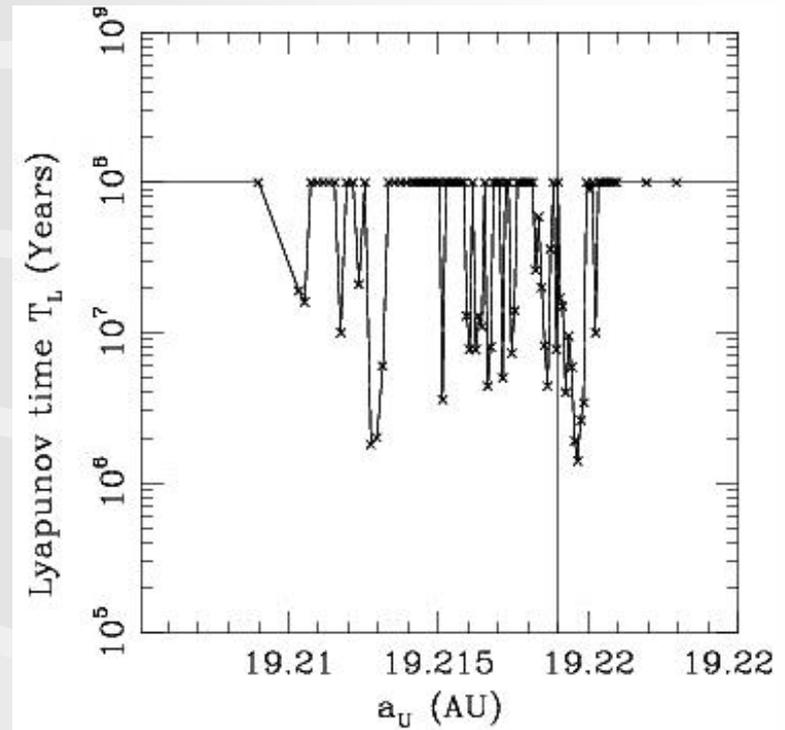
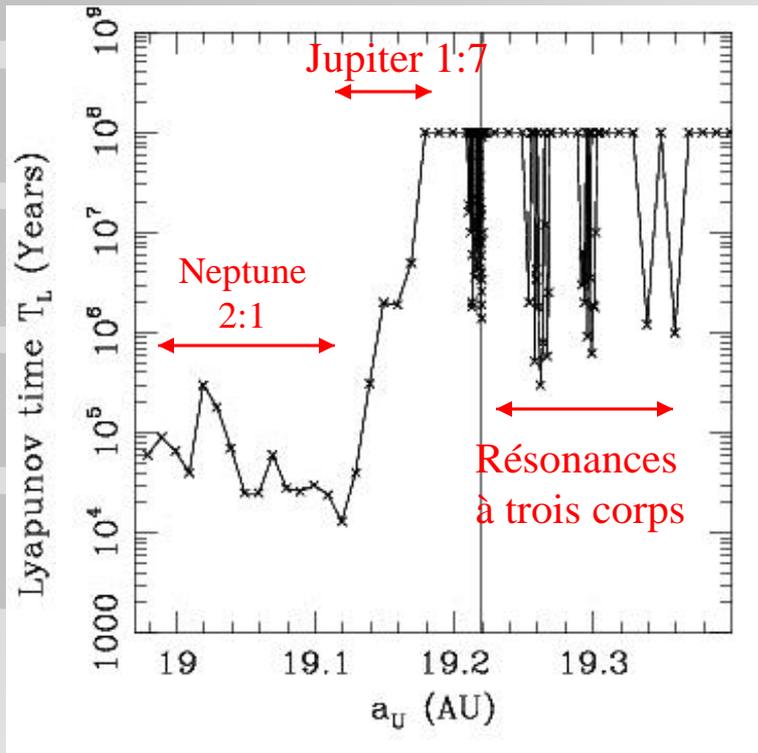
Estimer le chaos : l'exposant de Lyapunov

- Lorsqu'une orbite est chaotique, deux situations très proches verront leurs évolutions **diverger exponentiellement**

$$\left\| q_1(t) - q_2(t) \right\| \propto e^{\lambda t}$$

- $\lambda =$ exposant de Lyapunov, $1/\lambda = t_l =$ temps de Lyapunov
- t_l est le temps au bout duquel deux orbites infiniment proches **finiront par diverger** (effet papillon)
- Plus λ est grand (t_l est petit), plus le chaos est important.
- Une orbite **non chaotique vérifiera $\lambda = 0$ (ou $\lambda < 0$)**
- En **météo** terrestre, t_l est de l'ordre de **~ 2 semaines**. Dans le **système solaire**, il vaut des **dizaines de millions d'années**.

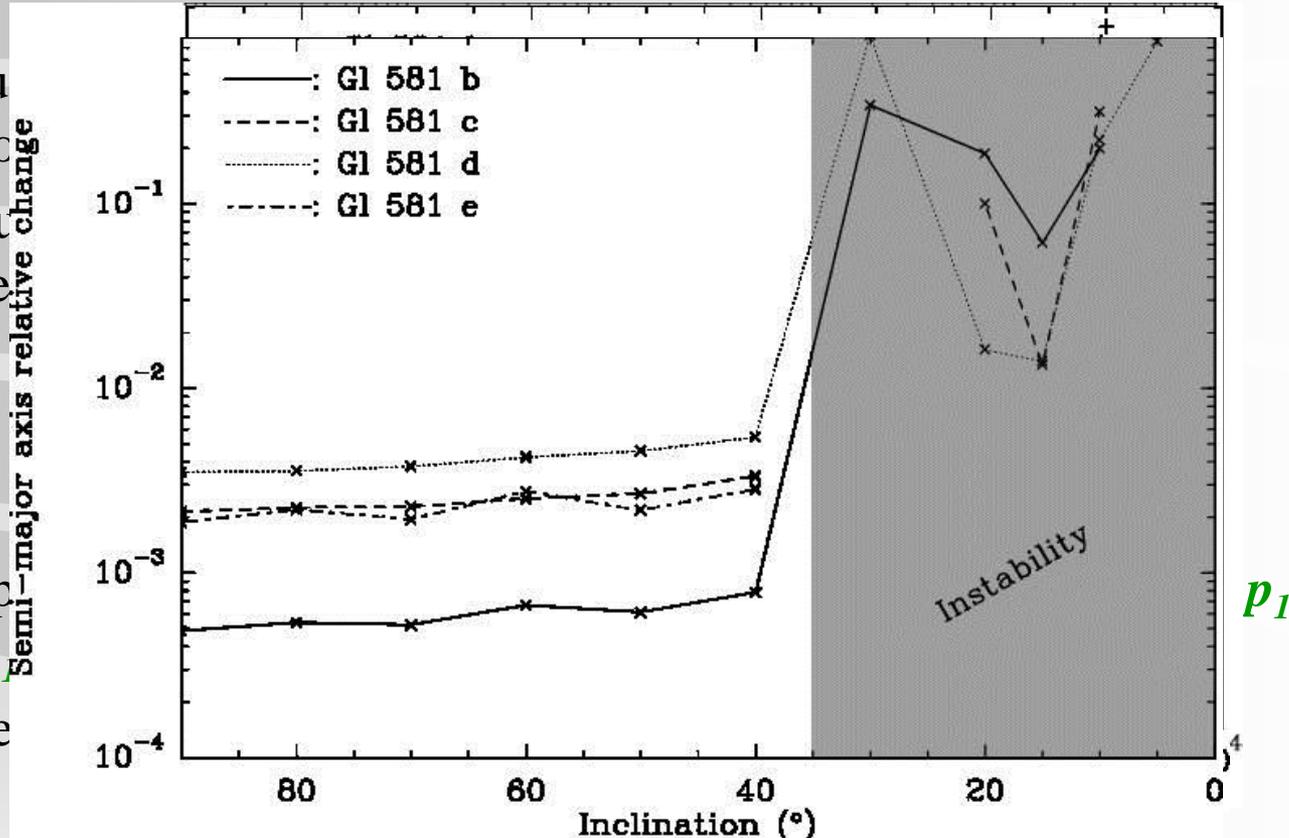
Exposants de Lyapunov



- Exemple : l'orbite d'Uranus. Les **résonances** rendent les orbites **très** chaotiques (*mais pas forcément instables*)

Calcul pratique des exposants de Lyapunov

- Dans une situation
- Au bout de calculs
- On applique et de p_1
- On a le



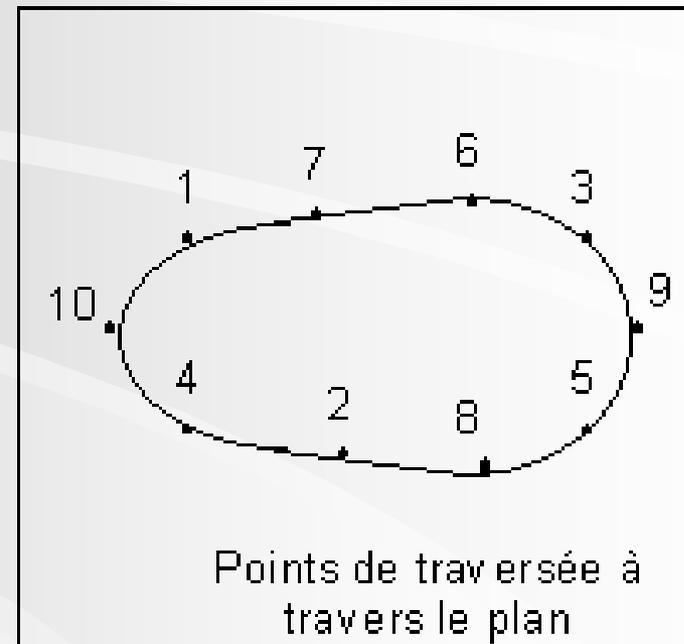
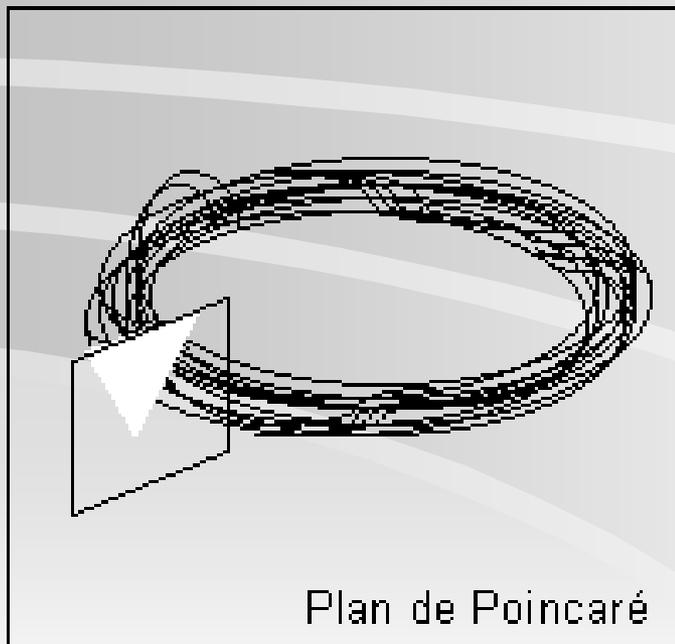
$$L = \lim_{n \rightarrow \infty} \frac{\text{Inclination } (^\circ)}{n t_{\text{norm}}} \sum_{i=1}^n s_i$$

Conclusions sur les exposants de Lyapunov

- Globalement, le système solaire est chaotique ($\lambda > 0$), mais les exposants varient énormément à l'intérieur du système.
- Le système des planètes principales est chaotique avec un temps de Lyapunov de plusieurs centaines de millions d'années.
- Localement, les résonances rendent certaines orbites très chaotiques (ex: Pluton $t_1 \approx 20$ millions d'années)
- Le comportement chaotique est révélé par l'intégration numérique, mais le système solaire semble stable depuis 4,5 milliards d'années... *Contradiction ?*
- **NON, car chaos \neq instabilité !**

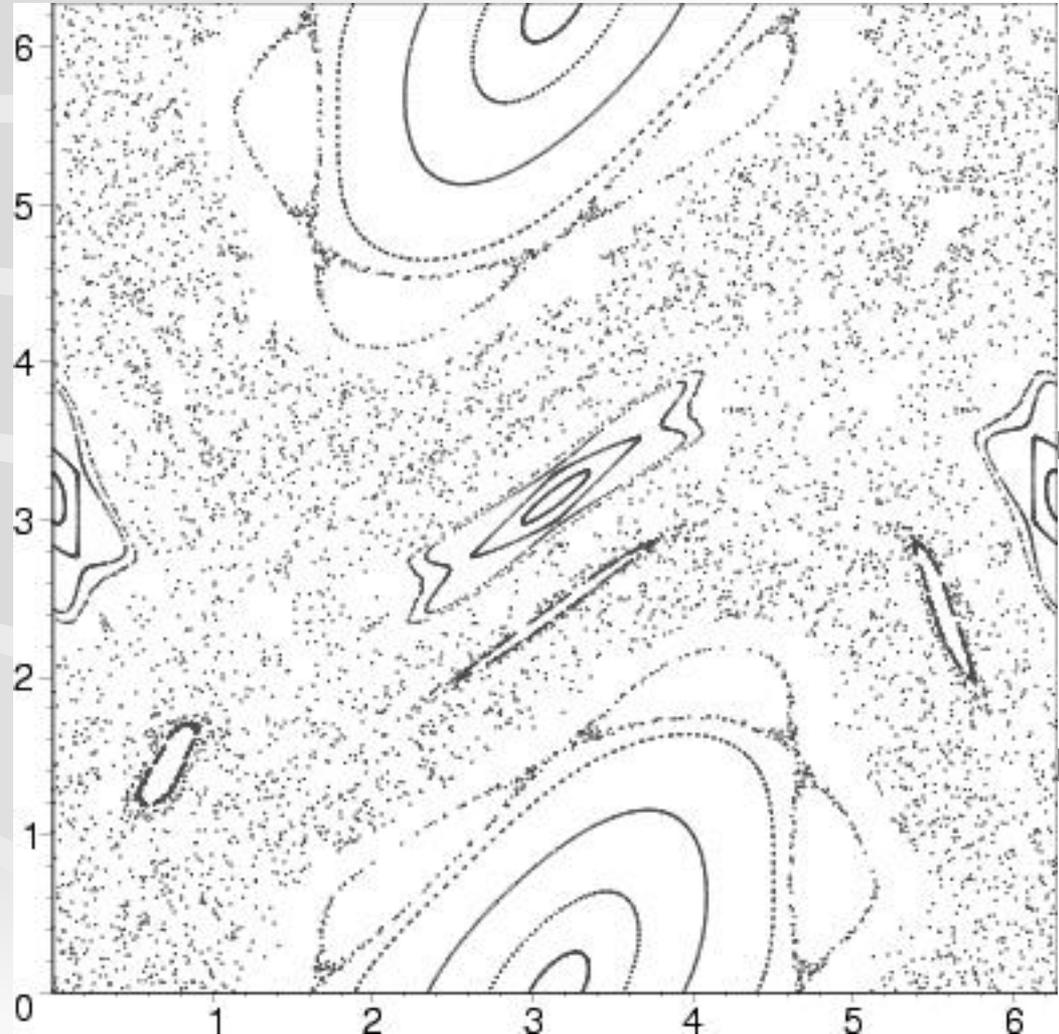
Voir le chaos : La section de Poincaré

- Pour un système décrit par **plusieurs coordonnées (degrés de liberté)**, on trace les points de passage par un **plan particulier** (par exemple $x=0$)



Voir le chaos : La section de Poincaré

- Les orbites non-chaotiques se traduisent par des courbes régulières. On parle d'orbites quasi-périodiques
- Les orbites chaotiques donnent des nuages de points sans ordre particulier.



Détecter le chaos : l'analyse en fréquences

- **Idée** : les orbites quasi-périodiques (aussi appelées tores de KAM) sont caractérisées par un nombre fini de fréquences caractéristiques d'évolution. Les orbites chaotiques n'ont pas de fréquence bien définie.
- S'il est possible de déterminer numériquement les fréquences caractéristiques, leur stabilité temporelle doit indiquer des orbites régulières (Laskar et al. 1990 – 2002)
- En général, pour identifier le chaos on utilise le calcul des exposants de Lyapunov *et* l'analyse en fréquences.

Calcul des fréquences caractéristiques

- **Idée** : Un système quasi-périodique est en général décrit par l'évolution d'un certain nombre d'angles ($q_i, i=1 \dots n$)
- Il y a n fréquences caractéristiques ($\omega_i, i=1 \dots n$). En général, chaque ω_i est la fréquence principale d'évolution d'un des q_j . Pour un temps T suffisamment grand, on calcule la quantité

$$\Phi_j(\omega) = \frac{1}{T} \int_{t_0}^{t_0+T} \exp(i q_j(t)) \exp(-i \omega t) dt$$

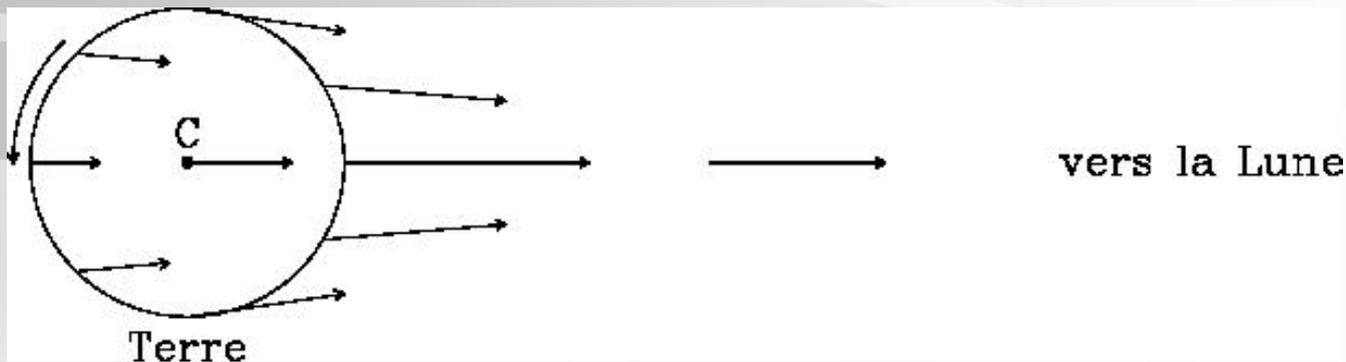
Gravitation – Mécanique céleste

9. Les effets de marée

- L'effet Terre-Lune
- La limite de Roche
- Les effets plus fins

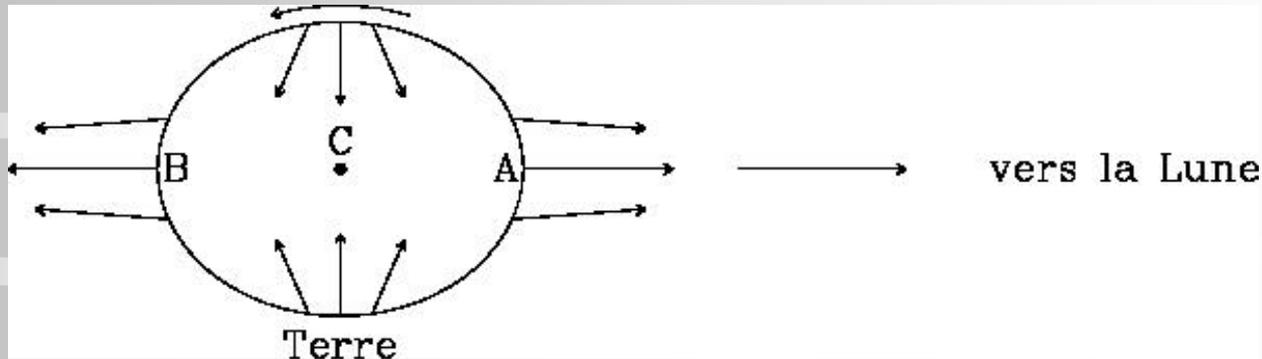
Les effets de marée

- Les effets de marée sont des **effets différentiels** de la gravitation dus à la **taille non ponctuelle** des corps célestes
- Leur portée est **générale dans l'Univers**.
- Exemple : Effet de la Lune sur la Terre . Tous les points de la Terre ne sont **pas attirés de la même façon**.



Les effets de marée

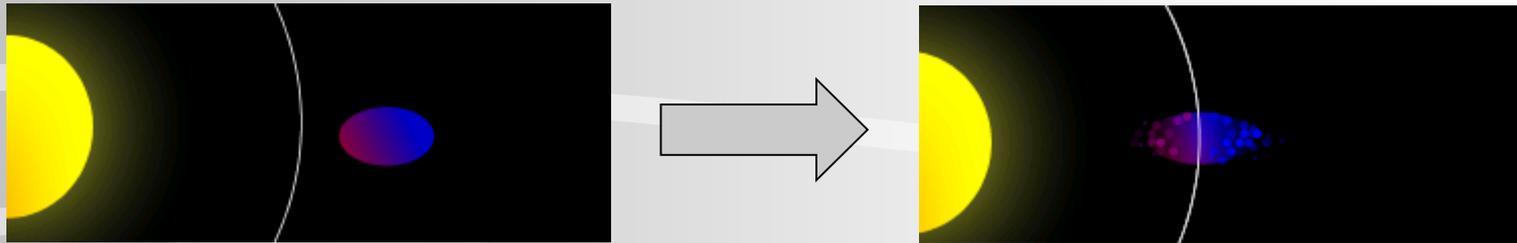
- Pour avoir l'effet local, il faut retrancher l'attraction au centre C (compensé par le mouvement orbital)



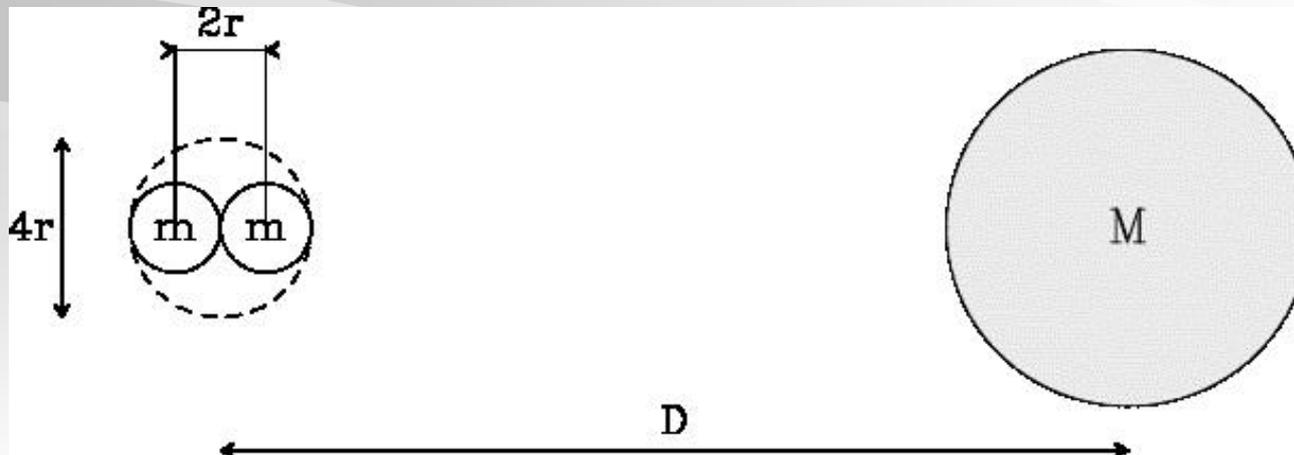
- Conséquence : la Terre s'allonge comme un ballon de rugby dans la direction de la Lune \Rightarrow deux marées par jour.
- Dans le cas de la Terre, l'allongement théorique est de l'ordre de $\sim 1\text{m}$. Les masses océaniques sont plus affectées \Rightarrow marées océaniques
- La forme des côtes influe beaucoup sur l'amplitude.
- Il y a aussi les marées dues au Soleil (5/11 fois plus faibles). La combinaison des deux crée les marées de vive eau ou de morte eau.

Limite de Roche

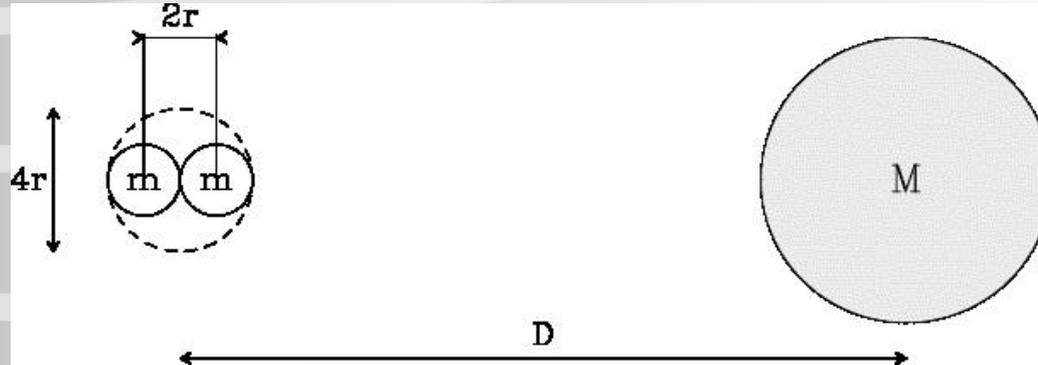
- Un satellite distordu peut se retrouver **brisé** si l'effet de marée est trop **fort** = s'il est trop près de la planète \Rightarrow Limite de Roche



- Considérons un satellite constitué de deux masses m accolées de rayon r situées à une distance D d'une planète de masse M



Limite de Roche



- On écrit la **différence d'attraction** de la part de **M** entre les deux masses

$$\Delta F_g \approx \left(\frac{dF_g}{dD} \right) \times 2r = \frac{4GMmr}{D^3}$$

$$F_c = \frac{Gm^2}{4r^2}$$

- La force de cohésion entre les deux masses vaut
- Les deux masses seront séparées si $\Delta F_g > F_c$. On écrit ensuite

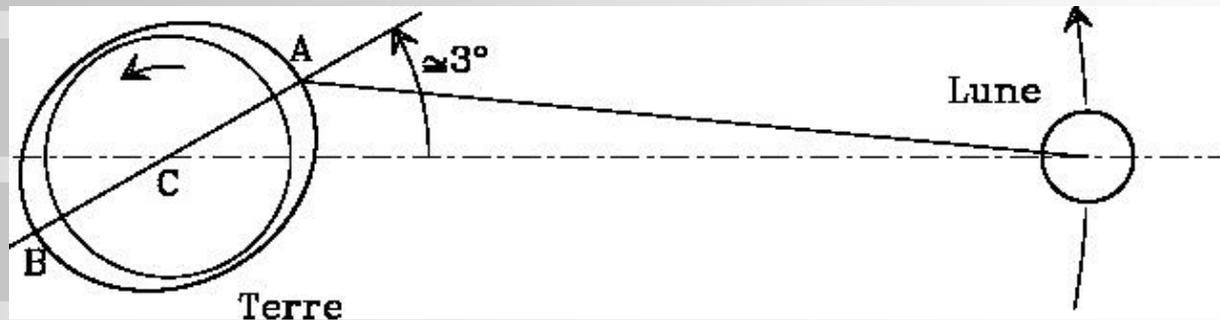
$$m = \frac{4}{3} \pi r^3 \rho_{sat} \quad \text{et} \quad M = \frac{4}{3} \pi R^3 \rho_{pl}$$

- La condition $\Delta F_g > F_c$ se traduit par $D < \sqrt[3]{16 \frac{\rho_{pl}}{\rho_{sat}}} \times R \approx 2.52 \left(\frac{\rho_{pl}}{\rho_{sat}} \right)^{1/3} R$
- C'est la limite de Roche (coef réel ~ 2.45)

- Application : Anneaux de Saturne**

Effets de marée : suite

- On revient à l'effet Terre-Lune :



- La Terre tourne plus vite sur elle-même que la Lune ne tourne autour d'elle \Rightarrow Le bourrelet créé par la Lune prend de l'avance
- La Terre est visqueuse, le bourrelet ne se réaligne pas instantanément \Rightarrow décalage permanent
- Conséquence 1 : existence d'un couplage entre la rotation de la Terre et le mouvement orbital de la Lune (couplage spin-orbite)
- Traduction : Dissipation d'énergie (friction, exemple : Jupiter - Io) et échange de moment cinétique orbital – rotation.

Effets de marée : suite

- Le couple Lune \rightarrow Terre tend à réaligner le bourrelet \Rightarrow **Ralentissement de la rotation de la Terre** ! (2ms / siècle)
- Dans le même temps, conservation du moment cinétique \Rightarrow **Eloignement de la Lune** ! (3cm / an)
- L'effet Terre \rightarrow Lune est beaucoup plus fort. Conséquence : Aujourd'hui, **la Lune nous présente toujours la même face** = rotation synchrone
- **Etat final** = Les deux corps se présentent toujours la même face = **synchronisation** . Exemple : Pluton-Charon
- On peut se retrouver dans des situations intermédiaires. Exemple : Soleil – Mercure = **résonance 3:2** entre la période de rotation et la période orbitale (**résonance spin – orbite**)
- Autre effet à plus long terme : **circularisation** de l'orbite. Exemple : les exoplanètes très proches de leurs étoiles (Jupiters chauds)

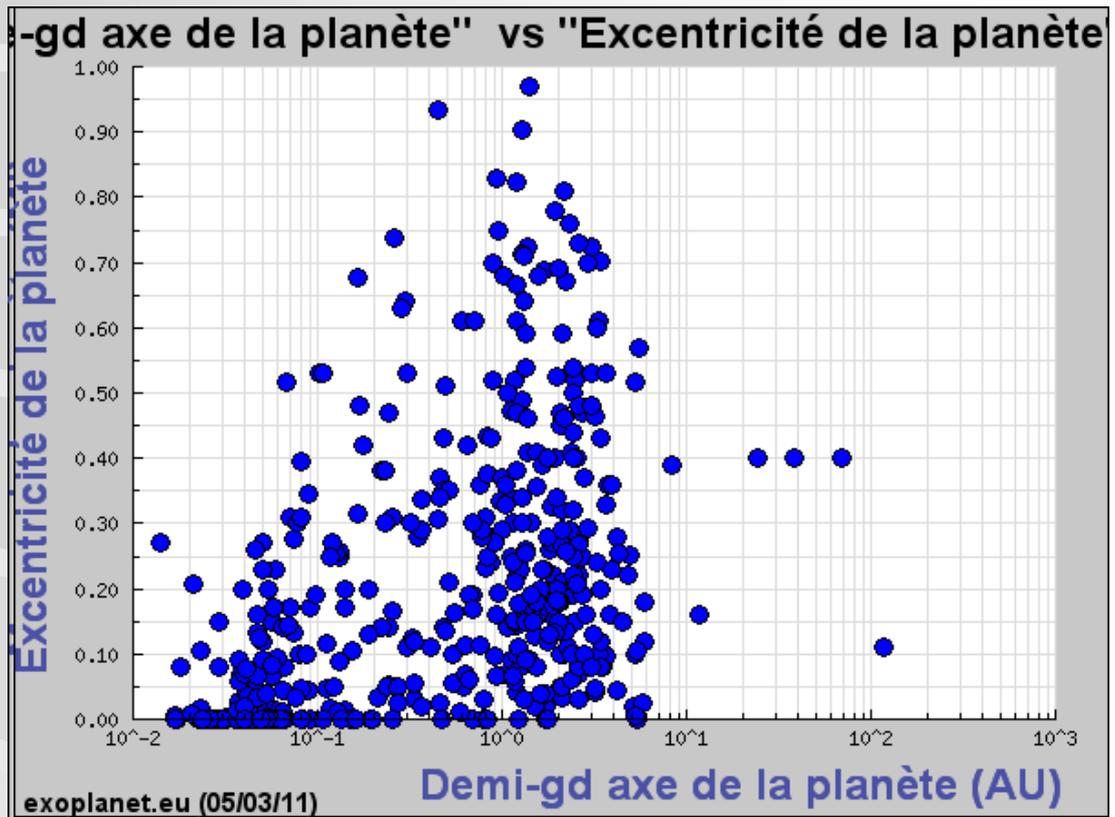
Gravitation – Mécanique céleste

10. Les planètes extrasolaires

- Présentation
- Détection directe
- Transits
- Le mouvement réflexe
- Astrométrie et vitesses radiales
- Les Jupiters chauds
- La migration
- Les planètes excentriques

Il n'y a pas que le système solaire...

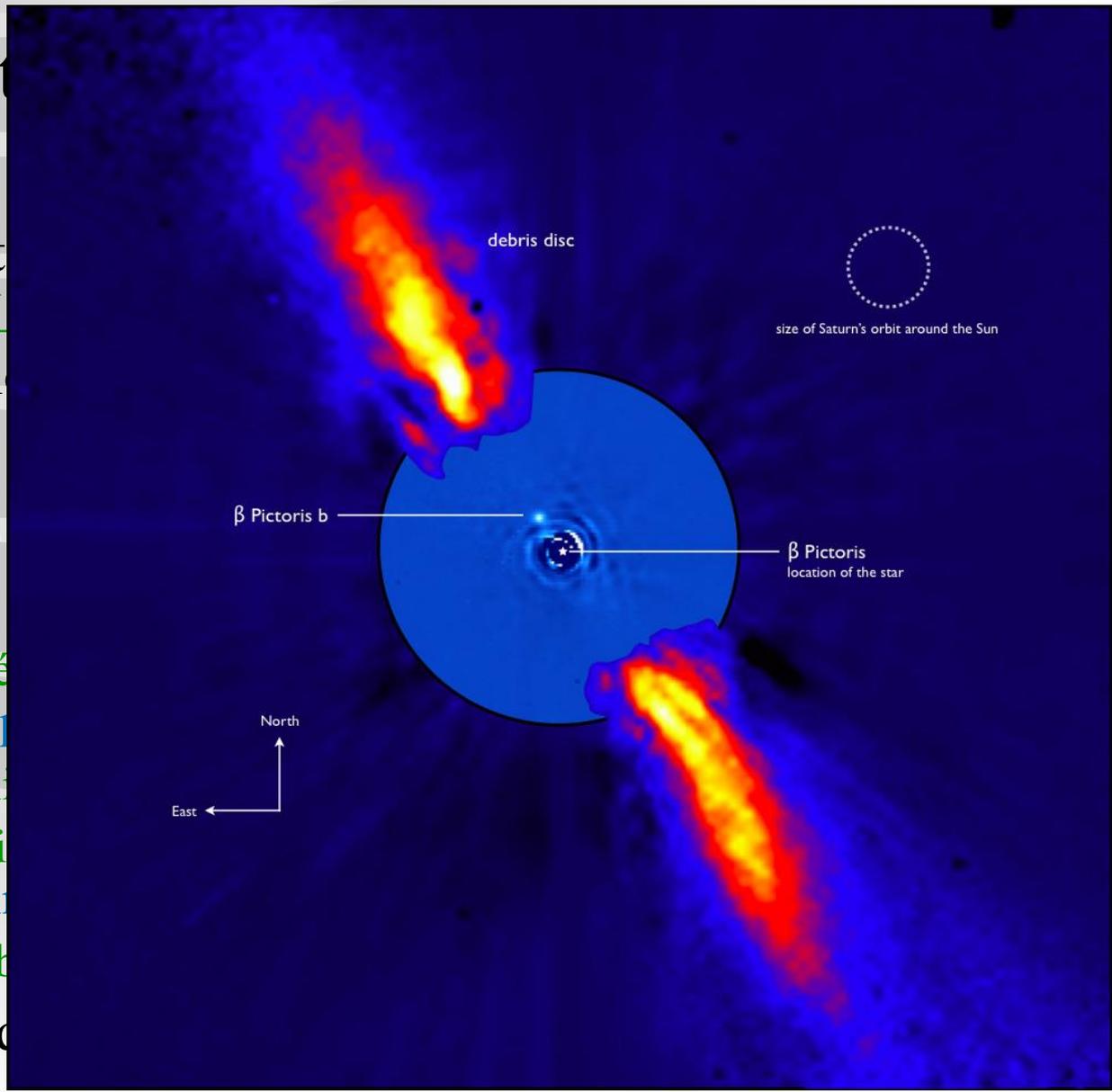
- On connaît aujourd'hui près de 3500 planètes extrasolaires (exoplanètes) = systèmes planétaires autour d'autres étoiles (2600 systèmes)
- Ces systèmes présentent des caractéristiques communes et des différences avec le système solaire : planètes géantes proches de leur étoile (**Jupiters chauds**) et **orbites excentriques**
- ⇒ Témoin d'évolution dynamiques différentes



Mé

ete

- C'est
- A pri
- Dans
- Pour
- Ré
- El
- Di
- l'i
- Ob
- Quel



!

e ou

e)

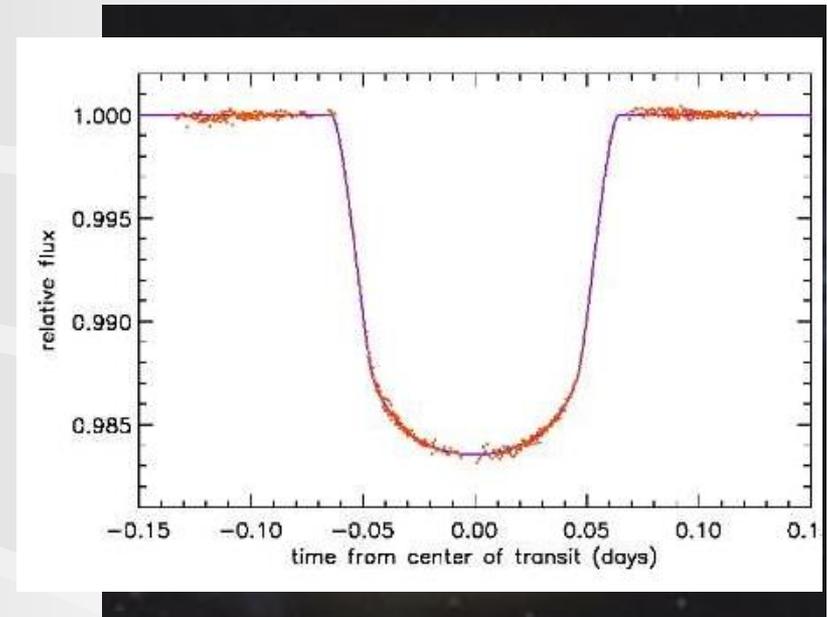
s

Méthode de détection 2 : transit

- Si la planète s'interpose entre l'étoile et la Terre, la luminosité de l'étoile doit baisser temporairement.

$$L_{\min} = L_* \times \left(\frac{R_p}{R_*} \right)^2$$

- Si la planète est trop petite, la baisse est indétectable.
- Il faut que l'orbite de la planète soit peu inclinée par rapport à la ligne de visée.
- Le transit ne doit pas avoir lieu trop rarement (faible période orbitale)
- Cette méthode donne accès au rayon des planètes.
- Les satellites CoRoT et Kepler ont été lancés pour chercher des transits
- ↳ Cette méthode favorise la détection de grosses planètes proches de leur étoile



~2700 planètes ont été détectées par cette méthode à ce jour (Kepler)
... y compris des Terres

Le mouvement réflexe

- Une étoile et sa planète tournent tous deux **autour de leur centre de gravité commun**.
- En conséquence, **l'étoile décrit une petite orbite**, copie miniature de celle de la planète. *C'est le mouvement réflexe.*
- **On peut détecter la planète en détectant le mouvement réflexe.**



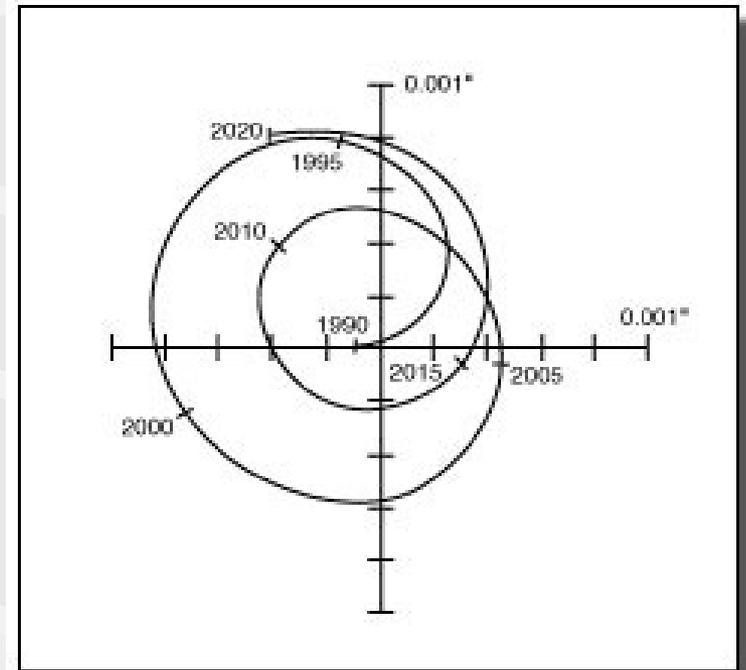
Méthode de détection 3 : astrométrie

- Idée : détecter le mouvement réflexe de l'étoile **sur le fond du ciel**.

$$\Delta \alpha = - \frac{m_p}{m_p + M_*} \frac{a}{d} \frac{(1 - e^2)}{1 + e \cos v} \sqrt{1 - \sin^2(\omega + v) \sin^2 i}$$

$$\sim \frac{m_p}{M_*} \frac{a}{d}$$

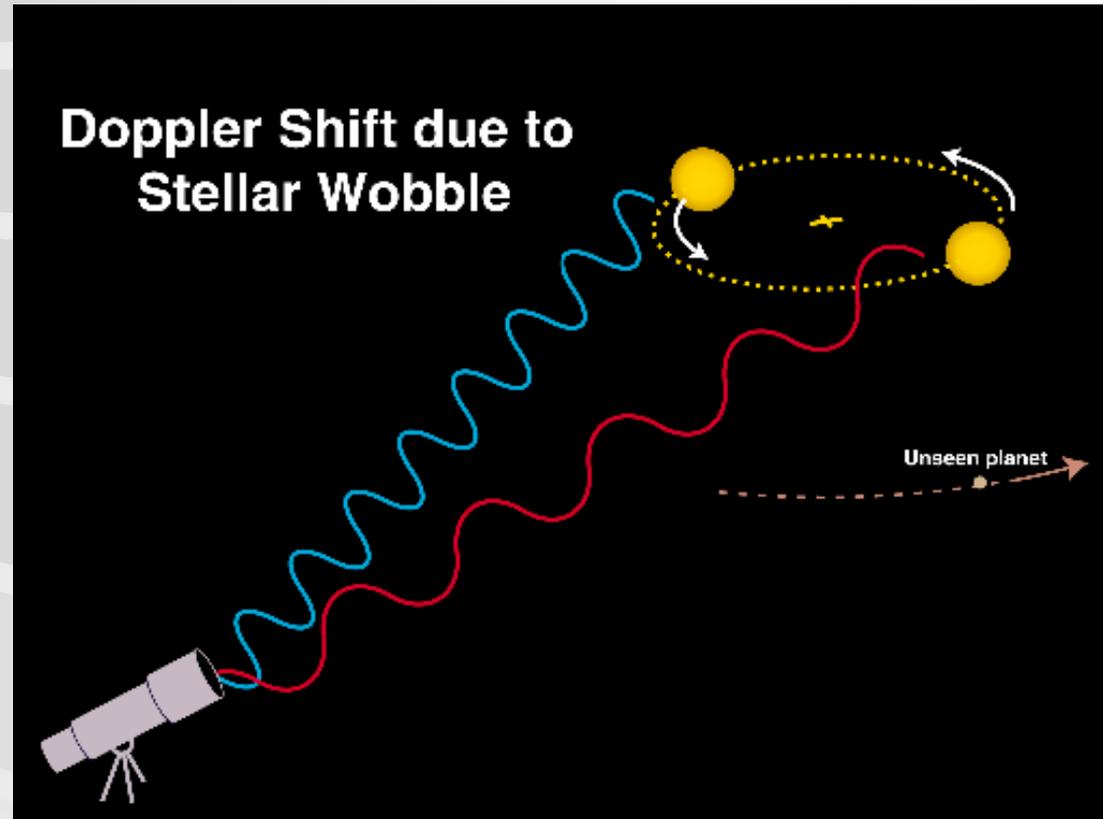
- Il faut détecter des mouvements de l'ordre de la **milliseconde d'arc**.
- Sensible aux **grosses planètes, grandes orbites et proches étoiles**.
- **1 planète découverte...**
- **Un satellite actuel : GAIA**



Mouvement du Soleil vu depuis 10 pc

Méthode de détection 4 : vitesses radiales

- Idée : détecter le mouvement réflexe de l'étoile par la **variation de vitesse de l'étoile par rapport à nous**. On utilise le **décalage Doppler** des raies spectrales de l'étoile $\Delta\lambda/\lambda=v/c$
- **700 planètes** découvertes à ce jour par cette méthode...



Méthode : vitesses radiales (II)

• Théorie :

$$V_r = \frac{m_p}{m_p + M_*} \frac{2\pi}{P} \frac{a \sin i}{\sqrt{1 - e^2}} (\cos(\omega + \nu) + e \cos \omega)$$

(P = période)
(i = inclinaison)
(K=amplitude)

$$K = \sqrt[3]{\frac{2\pi G}{P} \frac{m_p \sin i}{(m_p + M_*)^{2/3}} \frac{1}{\sqrt{1 - e^2}}}$$

$$\approx 28.4 \text{ m s}^{-1} \times \left(\frac{P}{1 \text{ an}}\right)^{-1/3} \left(\frac{m_p \sin i}{M_{\text{Jup}}}\right) \left(\frac{M_*}{M_{\odot}}\right)^{-2/3}$$

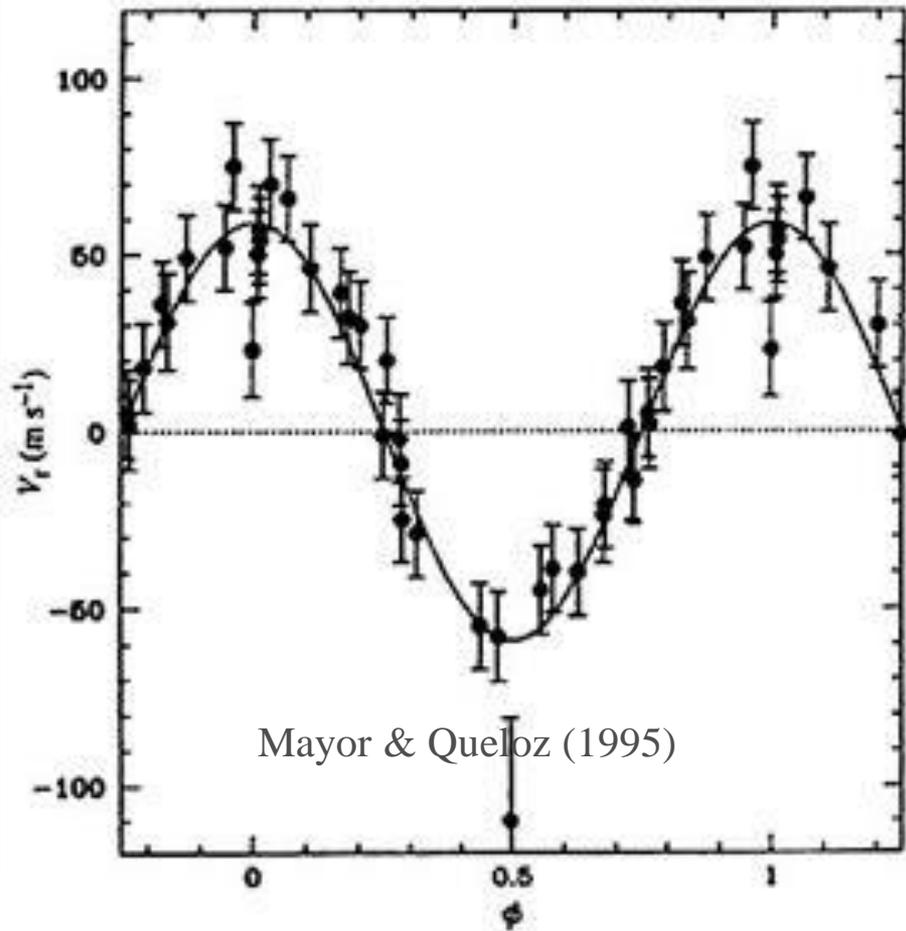
- Il faut mesurer la vitesse radiale avec une précision de l'ordre de **quelques mètres par seconde**. La méthode est sensible aux **grosses planètes** et aux **courtes périodes**.
- P se voit sur la courbe, la forme donne ω et e , l'amplitude donne $m_p \sin i$ sans plus de distinction.
- Tout dépend de la précision du spectrographe. Aujourd'hui, on atteint des précisions de l'ordre de **$\sim 1 \text{ m.s}^{-1}$** (HARPS, Chili)
- Les plus petite planètes découverte ont des masses de ~ 1 -- 2 masses terrestres
- *Projet : Instrument ESPRESSO \Rightarrow atteindre 10 cm.s^{-1}*

Méthode : vitesses radiales (III)

- 51 Pegasi :

Orbite ~circulaire

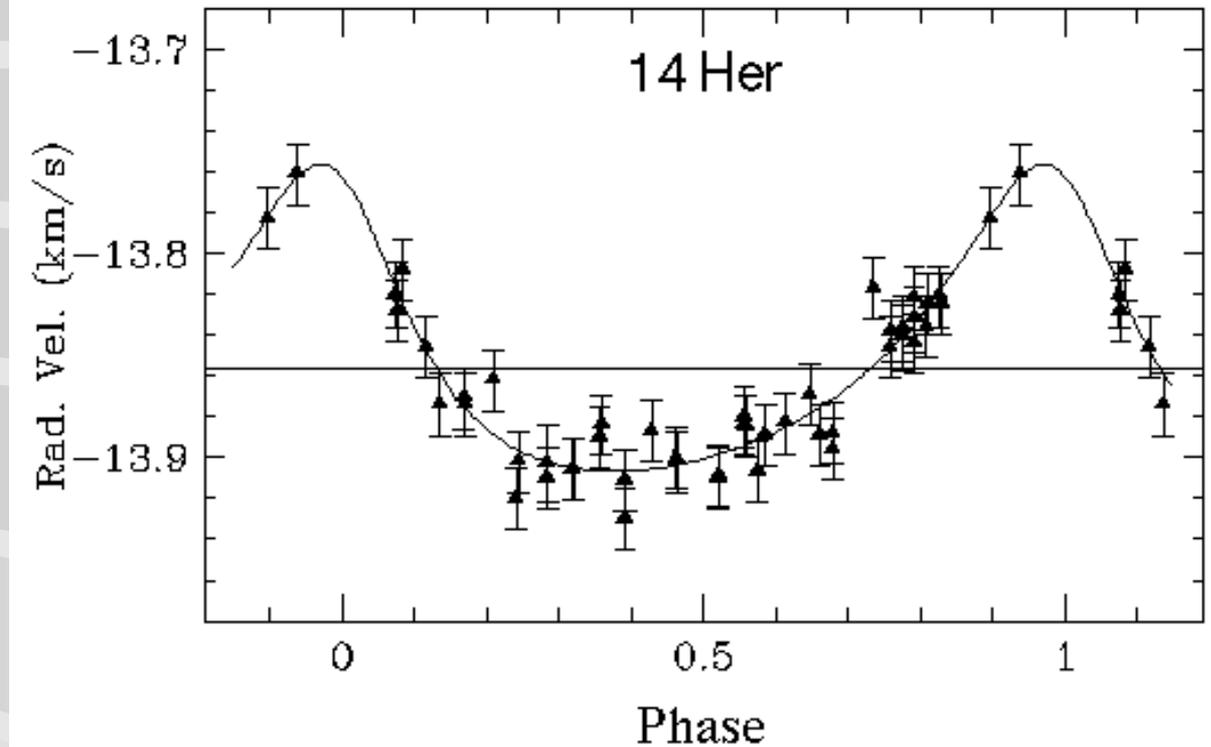
Période 4 jours



Méthode : vitesses radiales (IV)

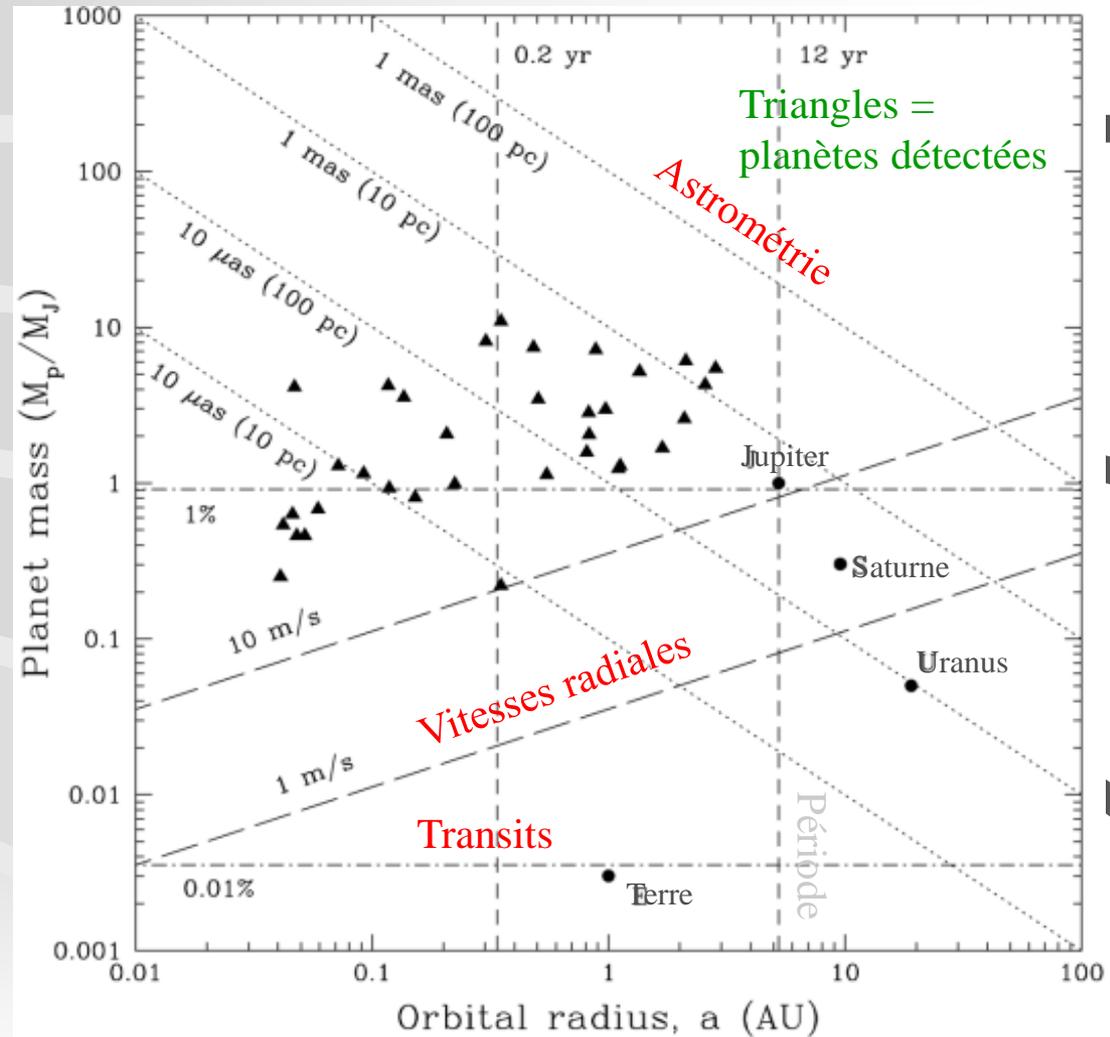
- 14 Her :

Orbite excentrique
Période



Méthodes : comparaison

- Les différentes méthodes sont **complémentaires** (zones de sensibilités différentes)
- Pour des planètes à **grande période**, il faut une **grande base de temps** (astrométrie, vitesses radiales) ou **beaucoup de chance** (transits).
- Aujourd'hui, **on sait détecter des planètes géantes**, **les Terres restent indétectables**, jusqu'à quand ?



Les Jupiters chauds

- Ce sont des **géantes gazeuses** proches de leur étoile
- Il semble **très difficile de former ces planètes in situ** : problème **d'accrétion du gaz** et de **quantité de matériau disponible**.
- **Modèle actuel** : Ces planètes ont **migré** vers l'intérieur par **interaction visqueuse** avec le **disque de gaz**
 - **Question 1** : Qu'est-ce qui **arrête** la migration ?
 - **Question 2** : Pourquoi ça a eu lieu dans **certains systèmes** et pas ailleurs (p.ex dans le **Système Solaire**)
- En fait, les planètes du **Système Solaire** **ont migré, mais moins...**

Jupiters chauds et migration

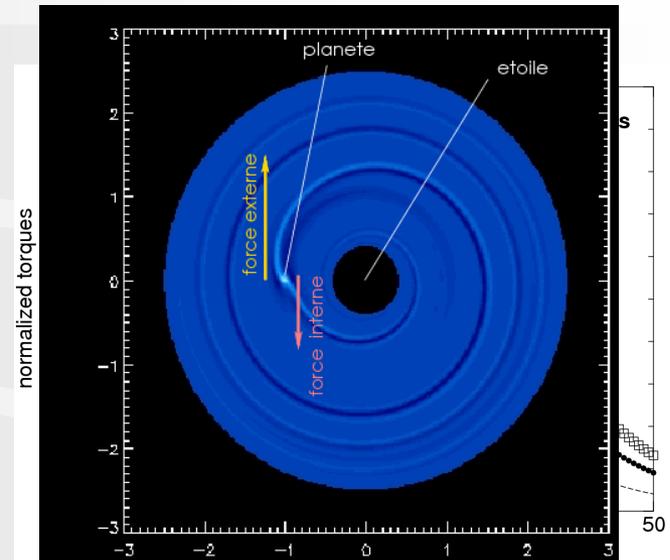
- Les Jupiters chauds **ne peuvent pas d'être formés là où ils sont aujourd'hui (pas assez de matière, problème d'accrétion du gaz).**
- L'idée est qu'ils se sont formés **dans le disque ($\sim 10 - 20 \text{ AU}$)** et qu'ils ont assez tôt subi **une migration orbitale vers l'intérieur.**
- **Questions :**
 - Quelle est la cause de la migration ?
 - Quelle est sa vitesse ?
 - Qu'est-ce qui l'arrête ?

La migration visqueuse

- On distingue **Type I** et **Type II**
- Un protoplanète a tendance à créer **un sillon** dans son disque.
- **Avant** la création du sillon : **Type I, rapide**
- **Après** la création du sillon : **Type II, plus lente**
- **Dans tous les cas** : Une planète excite des **ondes de densité spirales** dans son disque, en avant et en arrière, à partir de ses **résonances de Lindblad**.
- C'est l'excitation de ces résonances qui crée le sillon.
- Elle s'accompagne d'un **échange de moment cinétique** entre l'étoile et le disque (**couple**) \Leftrightarrow **migration**

La migration visqueuse

- Le bord interne du disque cède du moment cinétique à la planète;
- La planète cède du moment cinétique au bord externe.
- **Il n'y a pas équilibre.** La planète **cède plus de moment cinétique** qu'elle en gagne \Rightarrow **L'orbite de la planète rapetisse \Rightarrow migration vers l'intérieur !**
- Type I : le disque va jusqu'à la planète

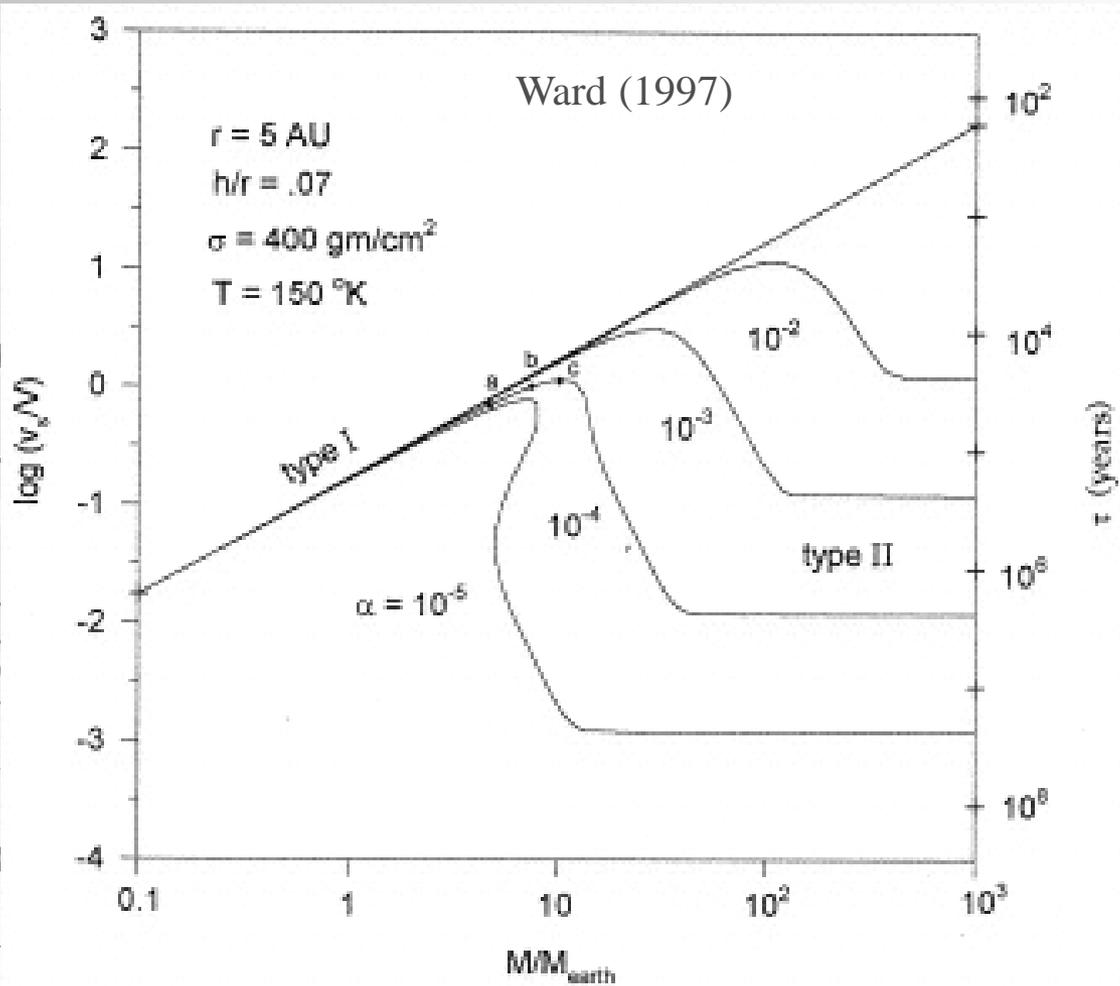


$$\tau_I \approx 10^{10} \times \left(\frac{M_{\text{Terre}}}{M_p} \right) \times \left(\frac{\sigma}{\text{g.cm}^{-2}} \right)^{-1} \times \left(\frac{h}{R} \right)^2 \approx 10^5 \times \left(\frac{M_{\text{Terre}}}{M_p} \right) \text{ orbites}$$

- **C'est rapide**, éventuellement **inférieur au temps de formation de la planète** (surtout des planètes géantes) !

La migration visqueuse

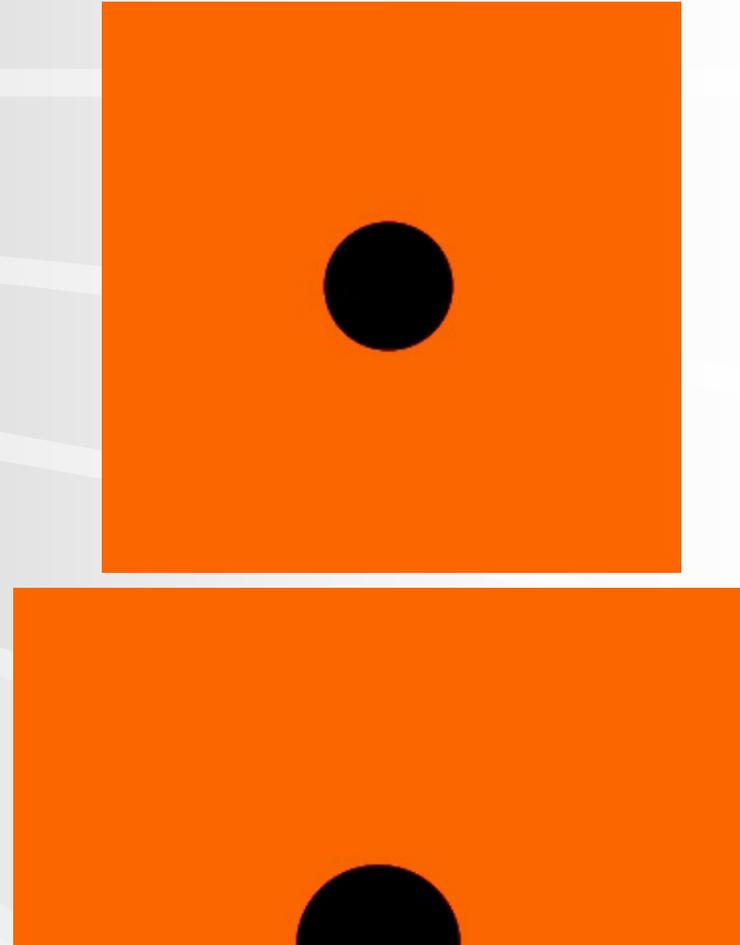
- Lorsque
- Pour u
- Mais
- Dans



e
 ration
 massive,
 e la

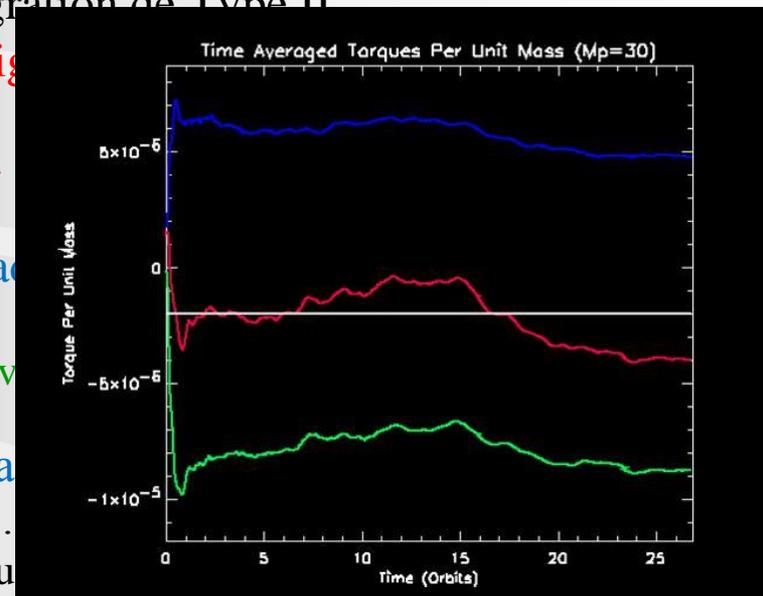
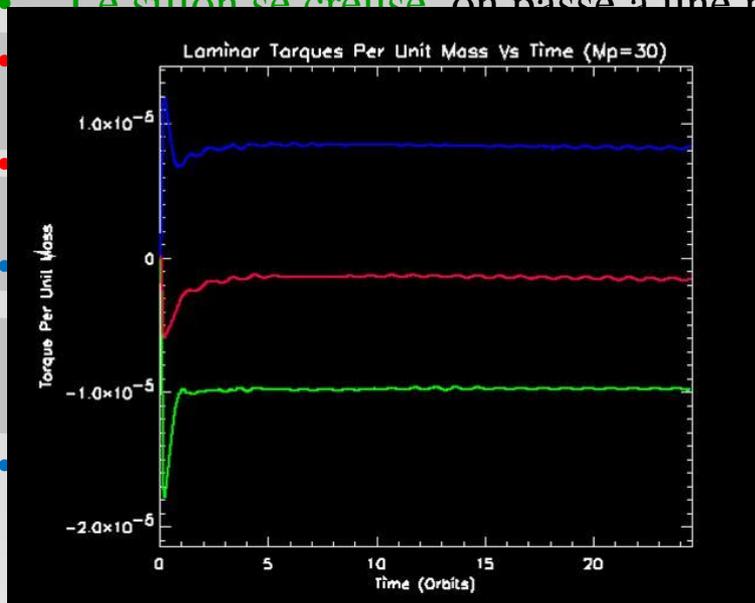
Simulations numériques

- On voit les **ondes spirales** et la formation du sillon.
- Même lorsque le sillon est présent (Type II), il y a des **bras de matière** vers la planète.



Evolution des disques

- Une protoplanète géante se forme dans un disque dense. On commence par une migration de Type I.
- Le sillon se creuse, on passe à une migration de Type II



- Une résonance 2:3 entre Jupiter et Saturne dans les premiers millions d'années a probablement stabilisé les deux planètes (Crida et al. 2007)
- Un disque turbulent peut faire varier le sens de migration

Origine possible des planètes excentriques

- Perturbations par une **étoile de passage** ?
 - Possible mais **statistiquement rare**, et **difficile à admettre pour des planètes proches**.
- Perturbations **entre planètes** ?
 - Le problème est **d'éviter l'instabilité** \Rightarrow éjection des planètes et/ou collisions
 - Le processus de formation doivent **normalement circulariser les orbites**, mais si les excentricités croissent par perturbations, on peut se retrouver éventuellement avec **une seule planète, géante, excentrique**.
 - **Problème** : Logiquement il reste la **plus grosse planète**, mais ce n'est pas celle-là qui doit être excentrique...
- Perturbations dans les **systèmes multiples** : **Résonance de Kozai**

Gravitation – Mécanique céleste

11. Les systèmes binaires et multiples

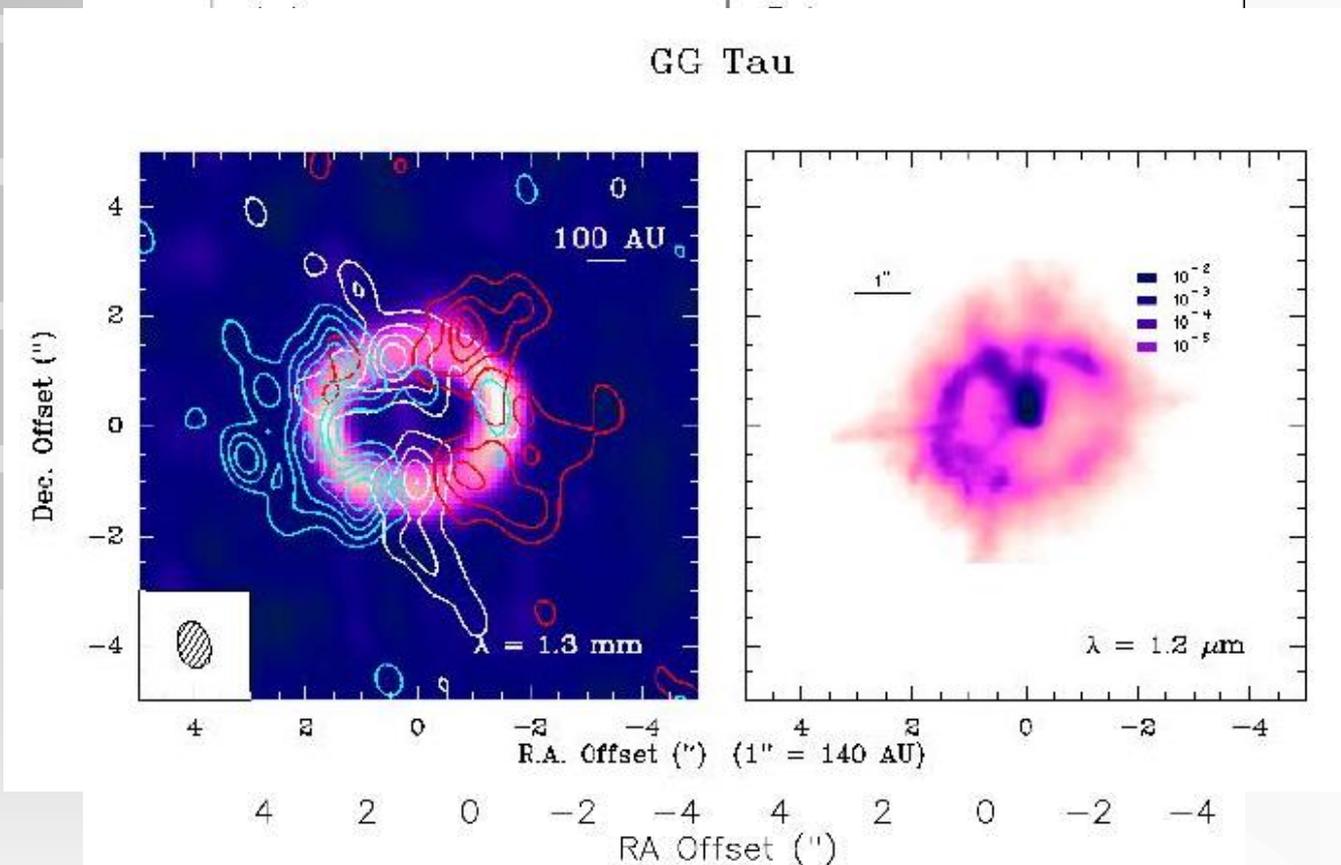
- Introduction : particularités
- Les planètes et les disques dans les systèmes multiples
- La dynamique des systèmes multiples

Systemes binaires et multiples

- Systeme **binaire** : **Deux étoiles** en orbite (Képlérienne) l'une autour de l'autre (60% des étoiles connues)
- Systeme **multiple** : plus de deux étoiles
- **Systeme multiple \neq système planétaire**, car tous les corps ont des masses comparables
 - La stabilité d'un système planétaire est assurée par **la masse dominante de l'étoile centrale**
 - La stabilité d'un système stellaire multiple est assurée par sa **structure hiérarchique en orbites emboîtées de tailles très différentes.**
- Conséquence : Les systèmes multiples ne sont **pas plans** et les **excentricités peuvent être très diverses.**

Systemes binaires et multiples : planètes ?

- Question : Y a-t-il des planètes dans les systèmes multiples ?



..) !
 me des
 e P = en
 aires :

Dynamique des systèmes multiples

- Les sujets
- E
- Un c dans com
- Ces stell

